

# 1. Introduction

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

IDEAL SOLUTIONS OF THE TARRY-ESCOTT PROBLEM  
OF DEGREES FOUR AND FIVE  
AND RELATED DIOPHANTINE SYSTEMS

by Ajai CHOUDHRY

ABSTRACT. In this paper, we obtain parametric ideal non-symmetric solutions in integers of the Tarry-Escott problem of degrees four and five, that is, of the system of simultaneous equations  $\sum_{i=1}^{k+1} a_i^r = \sum_{i=1}^{k+1} b_i^r$ ,  $r = 1, 2, \dots, k$  where  $k$  is 4 or 5. We use these non-symmetric solutions to obtain parametric solutions of the two diophantine systems  $\sum_{i=1}^{k+1} a_i^r = \sum_{i=1}^{k+1} b_i^r$ ,  $r = 1, 2, \dots, k, k + 2$  where  $k$  is 4 or 5.

1. INTRODUCTION

This paper is a sequel to my earlier paper [1] regarding the Tarry-Escott problem. It would be recalled that very little is known about ideal non-symmetric solutions of the Tarry-Escott problem of degree  $k$  when  $k > 3$ . When  $k = 4$ , the only known parametric ideal non-symmetric solution of the Tarry-Escott problem is given in [1]. This solution is in terms of polynomials of degree 8 in two parameters. When  $k = 5$ , only a single numerical solution seems to have been published [2, p.27]. No non-symmetric solutions have been published for  $k > 5$ .

In this paper, we will obtain parametric ideal non-symmetric solutions of the Tarry-Escott problem of degrees four and five. The parametric solutions of the Tarry-Escott problem of degree four obtained in this paper are more general and much simpler as compared to the parametric solution of this problem given in [1].

It has already been shown in [1] how ideal non-symmetric solutions of the Tarry-Escott problem of degree  $k$  may be used to generate solutions of the system of equations

$$(1.1) \quad \sum_{i=1}^{k+1} a_i^r = \sum_{i=1}^{k+1} b_i^r, \quad r = 1, 2, \dots, k, k+2$$

by applying a theorem of Gloden [2, p.24]. Applying this procedure to the non-symmetric ideal solutions of degrees four and five obtained in this paper, we get parametric solutions of (1.1) when  $k = 4$  or  $k = 5$ .

## 2. IDEAL NON-SYMMETRIC SOLUTIONS OF THE TARRY-ESCOTT PROBLEM OF DEGREE FOUR

To obtain ideal non-symmetric solutions of the Tarry-Escott problem of degree four, we have to obtain a solution of the system of equations

$$(2.1) \quad \sum_{i=1}^5 a_i^r = \sum_{i=1}^5 b_i^r, \quad r = 1, 2, 3, 4.$$

We first observe that the system of equations

$$(2.2) \quad X_1^r + X_2^r + X_3^r = Y_1^r + Y_2^r + Y_3^r, \quad r = 1, 2, 4,$$

reduces to

$$(2.3) \quad X_1^2 + X_1X_2 + X_2^2 = Y_1^2 + Y_1Y_2 + Y_2^2,$$

if we take  $X_3 = -X_1 - X_2$  and  $Y_3 = -Y_1 - Y_2$ . A solution of (2.3) in terms of arbitrary parameters  $m, n, x, y$ , is given by

$$(2.4) \quad \begin{aligned} X_1 &= (m + 2n)x + (-m + n)y, \\ X_2 &= (-2m - n)x + (-m - 2n)y, \\ Y_1 &= (m - n)x + (-m - 2n)y, \\ Y_2 &= (-2m - n)x + (-m + n)y, \end{aligned}$$

and we now get

$$(2.5) \quad \begin{aligned} X_3 &= (m - n)x + (2m + n)y, \\ Y_3 &= (m + 2n)x + (2m + n)y. \end{aligned}$$

It follows from this solution of the system of equations (2.2) that if we take