

5. Algebraic proof of Atiyah's η -index theorem

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

We now turn to the L^2 -index of Section 2. It extends to a homomorphism

$$\text{Index}_G: K_0(BG) \rightarrow \mathbf{R}$$

as follows. Each $x \in K_0(BG)$ is of the form $f_*(y)$ for some $y = [D] \in K_0(M)$, $f: M \rightarrow BG$, M a closed smooth manifold and D an elliptic operator on M . Let $\tilde{D}$ be the lifted operator to $\tilde{M}$, the G -covering space induced by $f: M \rightarrow BG$. Then put

$$\text{Index}_G(x) := \text{Index}_G(\tilde{D}).$$

One checks that $\text{Index}_G(x)$ is indeed well-defined, either by direct computation, or by identifying it with $\tau(x)$, where τ denotes the composite of the assembly map $K_0(BG) \rightarrow K_0(C_r^*G)$ with the natural trace $K_0(C_r^*G) \rightarrow \mathbf{R}$ (for this latter point of view, see Higson-Roe [10]; for a discussion of the assembly map see e.g. Kasparov [12], or Valette [14]). The following naturality property of this index map is a consequence of Lemma 3.1.

LEMMA 4.2. *For $H < G$ the following diagram commutes:*

$$\begin{array}{ccc} K_0(BH) & \xrightarrow{\text{Index}_H} & \mathbf{R} \\ \downarrow & & \parallel \\ K_0(BG) & \xrightarrow{\text{Index}_G} & \mathbf{R}. \quad \square \end{array}$$

Atiyah's L^2 -Index Theorem 2.1 for a given G can now be expressed as the statement (as already observed in [10])

$$\text{Index}_G = \text{Index}: K_0(BG) \rightarrow \mathbf{R}.$$

5. ALGEBRAIC PROOF OF ATIYAH'S L^2 -INDEX THEOREM

Recall that a group A is said to be *acyclic* if $H_*(BA, \mathbf{Z}) = 0$ for $* > 0$. For G a countable group, there exists an embedding $G \rightarrow A_G$ into a countable acyclic group A_G . There are many constructions of such a group A_G available in the literature, see for instance Kan-Thurston [11, Proposition 3.5], Berrick-Varadarajan [5] or Berrick-Chatterji-Mislin [6]; these different constructions are to be compared in Berrick's forthcoming work [7]. It follows that the suspension ΣBA_G is contractible, and therefore the inclusion $\{e\} \rightarrow A_G$

induces an isomorphism

$$K_0(B\{e\}) \xrightarrow{\cong} K_0(BA_G).$$

Our strategy is as follows. We show that the Atiyah L^2 -Index Theorem holds in the special case of acyclic groups, and finish the proof combining the above embedding of a group into an acyclic group.

Proof of Theorem 2.1. If a group A is acyclic, the equation $\text{Index}_A = \text{Index}$ follows from the diagram

$$\begin{array}{ccccc} K_0(BA) & \xrightarrow{\text{Index}_A} & \mathbf{R} & \xleftarrow{\text{Index}} & K_0(BA) \\ \cong \uparrow & & \uparrow & & \cong \uparrow \\ K_0(B\{e\}) & \xrightarrow[\cong]{\text{Index}_{\{e\}}} & \mathbf{Z} & \xleftarrow[\cong]{\text{Index}} & K_0(B\{e\}) \end{array}$$

because $\text{Index}_{\{e\}} = \text{Index}$ on the bottom line. For a general group G , consider an embedding into an acyclic group A_G and complete the proof by using Lemma 3.1, together with Lemmas 4.1 and 4.2.

REFERENCES

- [1] ATIYAH, M.F. Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras. *Astérisque* 32-3 (1976), 43-72.
- [2] ATIYAH, M.F. and I.M. SINGER. The index of elliptic operators III. *Ann. of Math.* (2) 87 (1968), 546-604.
- [3] BAUM, P. and A. CONNES. K -theory for Lie groups and foliations. *L'Enseignement Math.* (2) 46 (2000), 3-42.
- [4] BAUM, P. and R. DOUGLAS. K -homology and index theory. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* 38, Part 1 (1982), 117-173.
- [5] BERRICK, A.J. and K. VARADARAJAN. Binate towers of groups. *Arch. Math.* 62 (1994), 97-111.
- [6] BERRICK, A.J., I. CHATTERJI and G. MISLIN. From acyclic groups to the Bass Conjecture for amenable groups. (Submitted for publication 2002.)
- [7] BERRICK, A.J. The acyclic group dichotomy. (Preprint in preparation.)
- [8] DICKS, W. and T. SCHICK. The spectral measure of certain elements of the complex group ring of a wreath product. *Geom. Dedicata* 93 (2002), 121-137.
- [9] ECKMANN, B. Introduction to l_2 -methods in topology: reduced l_2 -homology, harmonic chains, l_2 -Betti numbers. (Notes prepared by Guido Mislin.) *Israel J. Math.* 117 (2000), 183-219.
- [10] HIGSON, N. and J. ROE. *Analytic K -Homology*. Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 2000.