

## 2.7 An example

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

The required extension to the ring of  $m$ -quasi-invariants is then provided by the following

**THEOREM 2.10** ([CV1, CV2]). *Let  $c = m: \Sigma \rightarrow \mathbf{Z}_+$ . The following two conditions are equivalent for a homogeneous polynomial  $q \in \mathbf{C}[\mathfrak{h}^*]$  of degree  $d$ .*

1) *There exists a differential operator*

$$L_q = q(\partial_{y_1}, \dots, \partial_{y_n}) + l.o.t.$$

*of homogeneity degree  $-d$ , such that  $[L_q, L] = 0$ .*

2)  *$q$  is an  $m$ -quasi-invariant homogeneous of degree  $d$ .*

Using this, we can extend system (5) to the system

$$(6) \quad L_p \psi = p(k)\psi, \quad p \in Q_m, \quad k \in \text{Spec } Q_m = X_m.$$

(Recall that, as a set,  $X_m = \mathfrak{h}$ .) Near a generic point  $x_0 \in \mathfrak{h}$ , system (6) has a one dimensional space of solutions, thus there exists a unique up to scaling solution  $\psi(k, x)$ , which can be expressed in elementary functions. This solution is called the *Baker-Akhiezer function*, and has the form

$$\psi(k, x) = P(k, x) e^{(k, x)}$$

with  $P(k, x)$  a polynomial of the form  $\delta(x)\delta(k) + l.o.t.$  and  $e^{(k, x)}$  denotes the exponential function computed in the scalar product  $(k, x)$ . Furthermore, it can be shown that  $\psi(k, x) = \psi(x, k)$  (see [CV1, CV2, FV]).

These results motivate the following terminology. The variety  $X_m$  is called *the spectral variety* of the Calogero-Moser system for the multiplicity function  $m$ , and  $Q_m$  is called *the spectral ring* of this system.

## 2.7 AN EXAMPLE

**EXAMPLE 2.11.** Let  $W = \mathbf{Z}/2$ ,  $\mathfrak{h} = \mathbf{C}$ ,  $m = 1$ . As we have seen,  $Q_m$  has a basis given by the monomials  $\{x^{2i}\} \cup \{x^{2i+3}\}$ ,  $i \geq 0$ . Let us set for such a monomial,  $L_{x^r} = L_r$ , and  $\partial = \frac{d}{dx}$ . Then we have

$$L_0 = 1, \quad L_2 = \partial^2 - \frac{2}{x}\partial, \quad L_3 = \partial^3 - \frac{3}{x}\partial^2 + \frac{3}{x^2}\partial.$$

As for the others,  $L_{2j} = L_2^j$ ,  $L_{2j+3} = L_2^j L_3$ . (Note that  $L_1$  is not defined). The system (6) in this case is

$$\begin{cases} \psi'' - \frac{2}{x}\psi' = k^2\psi, \\ \psi''' - \frac{3}{x}\psi'' + \frac{3}{x^2}\psi' = k^3\psi. \end{cases}$$

The solution can easily be computed by differentiating the first equation and then subtracting the second, thus obtaining the new system

$$\begin{cases} \psi'' - \frac{2}{x}\psi' = k^2\psi, \\ \psi'' - \left(\frac{1}{x} + k^2x\right)\psi' = -k^3x\psi. \end{cases}$$

Taking the difference, we get the first order equation

$$\psi' = \frac{k^2x}{kx - 1}\psi,$$

whose solution (up to constants) is given by  $\psi = (kx - 1)e^{kx}$ .

In fact, one can easily calculate  $\psi_m$  for a general  $m$ .

PROPOSITION 2.12.  $\psi_m(k, x) = (x\partial - 2m + 1)(x\partial - 2m - 1) \cdots (x\partial - 1)e^{kx}$ .

*Proof.* We could use the direct method of Example 2.11, but it is more convenient to proceed differently. Namely, we have

$$\left(\partial^2 - \frac{2m}{x}\partial\right)(x\partial - 2m + 1) = (x\partial - 2m + 1)\left(\partial^2 - \frac{2(m-1)}{x}\partial\right)$$

as it is easy to verify directly. So using induction on  $m$  starting with  $m = 0$ , we get

$$\left(\partial^2 - \frac{2m}{x}\partial\right)\psi_m(k, x) = (x\partial - 2m + 1)\left(\partial^2 - \frac{2(m-1)}{x}\partial\right)\psi_{m-1}(k, x) = k^2\psi_m(k, x),$$

and  $\psi_m(k, x)$  is our solution.  $\square$

### 3. LECTURE 3

#### 3.1 SHIFT OPERATOR AND CONSTRUCTION OF THE BAKER-AKHIEZER FUNCTION

In Lecture 2, we have introduced the Baker-Akhiezer function  $\psi(k, x)$  for the operator

$$L = \Delta - \sum_{s \in \Sigma} \frac{2c_s}{\alpha_s(x)} \partial_{\alpha_s}.$$

The way to construct  $\psi(k, x)$  is via the Opdam shift operator. Given a function  $m: \Sigma \rightarrow \mathbf{Z}_+$ , Opdam showed in [Op1] that there exists a unique  $W$ -invariant