

# 8. COMMENTAIRES ET QUESTIONS

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^N \sum_{n=1}^{m-1} (m-n)^{-\delta} &= \sum_{m=2}^N \sum_{n=1}^{m-1} n^{-\delta} \\ &\leq N \sum_{n=1}^{N-1} n^{-\delta} = O(N^{2-\delta}). \end{aligned}$$

Finalement  $\sum_{N \geq 1} \frac{1}{N^3} \sum_{m,n=1}^N |\hat{\mu}(k(s_n - s_m))| < \infty$  puisque  $\delta > 0$ .  $\square$

Nous en déduisons le résultat suivant qui contient celui de Baker :

**COROLLAIRE 7.5.** *Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble fini d'entiers  $\geq 1$  contenant au moins deux éléments; il existe une infinité de  $x \in F(\mathcal{A})$  normal en toute base dès que la dimension de Hausdorff de  $F(\mathcal{A})$  est  $> 1/2$ .*

*Démonstration.* Soit  $1/2 < \delta < \dim_h F(\mathcal{A})$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{\delta(2\delta-1)}{8(2\delta+1)(4-\delta)}$  et  $q$  un entier  $\geq 2$ . Il résulte du corollaire 7.4 appliqué avec  $s_n = q^n$  et  $\mu = \mu_{\varepsilon, \delta}$  la mesure de Kaufman portée par  $F(\mathcal{A})$ , donnée par le théorème 1.4, que l'ensemble

$$\mathcal{N}_q = \{x \in F(\mathcal{A}) \text{ normal en base } q\}$$

est de mesure pleine pour la mesure de probabilité  $\mu$ . Ainsi  $\mu(\bigcap_{q \geq 2} \mathcal{N}_q) = 1$  d'où le corollaire.  $\square$

## 8. COMMENTAIRES ET QUESTIONS

Les mesures de Kaufman ainsi construites possèdent deux propriétés importantes: le comportement höldérien de la fonction de répartition et le comportement asymptotique précis de la transformée de Fourier. En fait la seconde propriété, fondamentale ici, découle en partie de la première, mais le comportement höldérien joue un rôle primordial dans l'approche de la conjecture de Littlewood par Pollington & Velani [14].

Les ensembles  $F(\mathcal{A})$ ,  $|\mathcal{A}| \geq 2$ , sont donc des ensembles de multiplicité stricte, lorsqu'ils possèdent une dimension de Hausdorff  $> 1/2$ . On peut se demander si la borne  $1/2$  est infranchissable ou si elle relève au contraire de la construction. La propriété pour un ensemble d'être de multiplicité peut paraître stable: un résultat fameux de Salem & Zygmund (voir [10]) établit, pour des ensembles de type Cantor à rapport de dissection  $\xi$ , l'équivalence:

$$E \text{ est de multiplicité} \iff \frac{1}{\xi} \notin S$$

où  $S$  est l'ensemble des nombres de Pisot. L'ensemble  $S$  étant fermé, la propriété est stable pour les petites variations de  $\xi$ . Qu'en est-il pour les ensembles du type  $F(\mathcal{A})$  ? Ceci amène naturellement les questions :

QUESTIONS. Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble fini d'entiers  $\geq 1$  tel que  $|\mathcal{A}| \geq 2$  et  $\dim_h F(\mathcal{A}) = d$ .

1.  $F(\mathcal{A})$  est-il encore de multiplicité ?
2.  $F(\mathcal{A})$  porte-t-il une mesure dont la décroissance à l'infini est en  $\mathcal{O}(1/(\log |n|)^\delta)$  pour un  $\delta > 1$  ?

Le lien entre la dimension de Hausdorff et la propriété de multiplicité n'est pas clairement établie puisque des ensembles de dimension de Hausdorff positive, tel l'ensemble triadique de Cantor, sont annulés par toute mesure de  $M_0$  ([10]) tandis que certains autres, de dimension nulle, sont de multiplicité, ce qui est assez frappant ([2], [3]).

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAKER, R. C. Non publié, cf. référence [12] ci-dessous, problème numéro 45.
- [2] BLUHM, C. E. Liouville numbers, Rajchman measures, and small Cantor sets. *Proc. Amer. Math. Soc.* 128 (2000), 2637–2640.
- [3] BUGEAUD, Y. Nombres de Liouville et nombres normaux. Preprint, 2002.
- [4] GOOD, I. J. The fractional dimensional theory of continued fractions. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 37 (1941), 199–228.
- [5] HARDY, G. H. and E. M. WRIGHT. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Clarendon Press, Oxford, 1979.
- [6] HENSLEY, D. The Hausdorff dimensions of some continued fraction Cantor sets. *J. Number Theory* 33 (1989), 182–198.
- [7] IVASHEV-MUSATOV, O. S. M-Mengen und h-Maße. *Mat. Zametki* 3 (1968), 441–447.
- [8] KAUFMAN, R. Continued fractions and Fourier transforms. *Mathematika* 27 (1980), 262–267.
- [9] KAHANE, J. P. and R. SALEM. Distribution modulo 1 and sets of uniqueness. *Bull. Amer. Math. Soc.* 70 (1964), 259–261.
- [10] KAHANE, J. P. et R. SALEM. *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*. Hermann, nouvelle édition, 1994.
- [11] LYONS, R. The measure of non-normal sets. *Invent. math.* 83 (1986), 605–616.
- [12] MONTGOMERY, H. L. *Ten Lectures on the Interface Between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis*. CBMS regional conf. series in math. 84, A.M.S., Providence, RI, 1994.