7. Une question de Montgomery

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$$r = u^{\eta} \quad \text{avec } \eta = \frac{\delta - 2\delta^2}{(4-\delta)(1+2\delta)}$$

ce qui est licite si l'on suppose $\delta > 1/2$. En reportant dans (17), il vient

$$|\hat{\mu}(u)| \ll u^{\eta} + u^{-7\delta^2/[(4-\delta)(1+2\delta)]} + u^{\eta} u^{15\varepsilon/(1+2\delta)} \ll u^{\eta+8\varepsilon},$$

car le second terme est négligeable.

Nous avons ainsi établi le théorème 1.4.

7. Une question de Montgomery

Montgomery a posé dans [12] la question suivante (problème 45):

Existe-t-il un nombre normal à quotients partiels bornés ?

Définition 7.1. Un nombre $x \in [0,1)$ est normal en base q où q est un entier $q \geq 2$ si et seulement si la suite $(q^n x)$ est équirépartie modulo 1, ce qui, via le critère de Weyl, s'écrit:

$$\forall k \neq 0, \ \lim_{N} \frac{1}{N} \sum_{n<N} e(kq^n x) = 0.$$

Le théorème de Borel établit que si $q \geq 2$, presque tout nombre (au sens de la mesure de Lebesgue) est normal en base q. C'est le théorème ergodique appliqué à la transformation $x \in [0,1) \to qx \bmod 1$. Qu'en est-il en restriction à un sous-ensemble de nombres irrationnels de $[0,1)$? Un outil est le suivant:

Théorème 7.2 (Davenport-Erdős-LeVeque). *Soit (s_n) une suite d'entiers et soit μ une mesure de probabilité portée par $[0,1)$ telle que*

$$\sum_{N \geq 1} \frac{1}{N^3} \sum_{m,n=1}^{N} \hat{\mu}(k(s_n - s_m)) < \infty,$$

pour tout entier $k \neq 0$, alors pour μ-presque tout $x \in [0,1)$, la suite $(s_n x)$ est équirépartie modulo 1.

Démonstration. Fixons $k \neq 0$. Notons $S_{N,k}(x) = \frac{1}{N} \sum_{n<N} e(ks_n x)$, et $I_{N,k} = \int |S_{N,k}(x)|^2 d\mu(x)$. L'hypothèse n'est autre que

$$\sum_{N \geq 1} \frac{I_{N,k}}{N} < +\infty, \quad \forall k \neq 0.$$

Nous utilisons un lemme classique sur les séries:

LEMME 7.3. *Soit* (x_n) *une suite de réels* ≥ 0 *telle que* $\sum_{n>0} x_n/n < \infty$. *Alors il existe une suite d'entiers* (N_r) *telle que :*

a) $\sum_r x_{N_r} < \infty$;

b) $\lim_r N_{r+1}/N_r = 1$.

Nous omettons provisoirement l'indice k et nous appliquons le lemme à la suite (I_N). Il existe une suite (N_r) telle que

$$\sum_r I_{N_r} = \int \sum_r |S_{N_r}(x)|^2 d\mu(x) < \infty .$$

En particulier, $\sum_r |S_{N_r}(x)|^2 < \infty$ μ-presque partout et $S_{N_r}(x) \to 0$ μ-presque partout. Maintenant nous interpolons :

Si $N_r \leq N \leq N_{r+1}$, on a: $NS_N - N_r S_{N_r} = \sum_{N_r \leq n < N} e(ks_n x)$ et $|NS_N - N_r S_{N_r}| \leq \sum_{N_r \leq n < N} 1 = N - N_r \leq N_{r+1} - N_r$, de sorte que

$$N|S_N| \leq N_r |S_{N_r}| + N_{r+1} - N_r \qquad \text{et} \qquad |S_N(x)| \leq |S_{N_r}(x)| + \frac{N_{r+1} - N_r}{N_r} .$$

Par la propriété b) du lemme, $S_N(x)$ tend vers 0 pour μ-presque tout x, ce qui prouve l'équirépartition modulo 1 de la suite $(s_n x)$ pour μ-presque tout x. $\square$

COROLLAIRE 7.4. *Soit* X *un ensemble de réels portant une mesure de probabilité* μ *telle que* $\hat{\mu}(n) = O(|n|^{-\delta})$ *où* $\delta > 0$.

Alors, pour toute suite (s_n) *strictement croissante d'entiers, la suite* $(s_n x)$ *est équirépartie modulo* 1 *pour* μ*-presque tout* $x \in X$.

Démonstration. Il suffit de vérifier les hypothèses du théorème 7.2 avec s_n et μ la mesure portée par X. Or si $k \neq 0$,

$$\begin{aligned}\sum_{m,n=1}^{N} \hat{\mu}(k(s_n - s_m)) &= N + \sum_{m,n \leq N,\ m \neq n} \hat{\mu}(k(s_n - s_m)) \\ &\leq N + C \sum_{m,n \leq N,\ m \neq n} |k(s_n - s_m)|^{-\delta} \\ &\leq N + 2C \sum_{m=2}^{N} \sum_{n=1}^{m-1} |(s_n - s_m)|^{-\delta} .\end{aligned}$$

Lorsque $m > n$, $s_m - s_n = s_m - s_{m-1} + s_{m-1} - \cdots + s_{n+1} - s_n \geq m - n$, et $\sum_{m,n=1}^{N} |\hat{\mu}(k(s_n - s_m))| \leq N + 2C \sum_{m=2}^{N} \sum_{n=1}^{m-1} (m - n)^{-\delta}$; maintenant,

$$\sum_{m=2}^{N}\sum_{n=1}^{m-1}(m-n)^{-\delta} = \sum_{m=2}^{N}\sum_{n=1}^{m-1} n^{-\delta}$$
$$\leq N\sum_{n=1}^{N-1} n^{-\delta} = O(N^{2-\delta}).$$

Finalement $\sum_{N\geq 1}\frac{1}{N^3}\sum_{m,n=1}^{N}|\hat{\mu}(k(s_n-s_m))| < \infty$ puisque $\delta > 0$. □

Nous en déduisons le résultat suivant qui contient celui de Baker:

COROLLAIRE 7.5. *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini d'entiers ≥ 1 contenant au moins deux éléments; il existe une infinité de $x \in F(\mathcal{A})$ normal en toute base dès que la dimension de Hausdorff de $F(\mathcal{A})$ est $> 1/2$.*

Démonstration. Soit $1/2 < \delta < \dim_{\mathrm{h}} F(\mathcal{A})$, $0 < \varepsilon < \frac{\delta(2\delta-1)}{8(2\delta+1)(4-\delta)}$ et q un entier ≥ 2. Il résulte du corollaire 7.4 appliqué avec $s_n = q^n$ et $\mu = \mu_{\varepsilon,\delta}$ la mesure de Kaufman portée par $F(\mathcal{A})$, donnée par le théorème 1.4, que l'ensemble

$$\mathcal{N}_q = \{x \in F(\mathcal{A}) \ \text{ normal en base } q\}$$

est de mesure pleine pour la mesure de probabilité μ. Ainsi $\mu(\bigcap_{q\geq 2}\mathcal{N}_q) = 1$ d'où le corollaire. □

8. COMMENTAIRES ET QUESTIONS

Les mesures de Kaufman ainsi construites possèdent deux propriétés importantes: le comportement höldérien de la fonction de répartition et le comportement asymptotique précis de la transformée de Fourier. En fait la seconde propriété, fondamentale ici, découle en partie de la première, mais le comportement höldérien joue un rôle primordial dans l'approche de la conjecture de Littlewood par Pollington & Velani [14].

Les ensembles $F(\mathcal{A})$, $|\mathcal{A}| \geq 2$, sont donc des ensembles de multiplicité stricte, lorsqu'ils possèdent une dimension de Hausdorff $> 1/2$. On peut se demander si la borne $1/2$ est infranchissable ou si elle relève au contraire de la construction. La propriété pour un ensemble d'être de multiplicité peut paraître stable: un résultat fameux de Salem & Zygmund (voir [10]) établit, pour des ensembles de type Cantor à rapport de dissection ξ, l'équivalence:

$$E \text{ est de multiplicité} \Longleftrightarrow \frac{1}{\xi} \notin S$$