3. Dimension de Hausdorff

d'où l'on tire

$$Q_{k+\ell}(x) = P_\ell(T^k x)Q_{k-1}(x) + Q_\ell(T^k x)Q_k(x)$$

d'où l'encadrement, puisque $P_j \leq Q_j$ pour tout j,

$$1 \leq \frac{Q_{k+\ell}(x)}{Q_\ell(T^k x)Q_k(x)} \leq 2\,. \tag{6}$$

En nous souvenant que $P_j(x)$ et $Q_j(x)$ ne dépendent que des j premiers quotients partiels de x, nous avons montré

LEMME 2.3. *Si tous les a_i sont au moins égaux à 1, la différence*

$$\operatorname{Log} Q_{k+\ell}(a_1,\ldots,a_{k+\ell}) - \operatorname{Log} Q_k(a_1,\ldots,a_k) - \operatorname{Log} Q_\ell(a_{k+1},\ldots,a_{k+\ell})$$

est en valeur absolue inférieure à $\operatorname{Log} 2$.

3. DIMENSION DE HAUSDORFF

Les ensembles $F(\mathcal{A})$ sont tous de mesure de Lebesgue nulle, mais de dimension de Hausdorff > 0. Good [4] a montré le résultat suivant:

THÉORÈME 3.1. *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini d'entiers ≥ 0. Soit $m \geq 1$. Soit $\alpha_{m,\mathcal{A}} > 0$ la solution en α de*

$$\sum_{a_1\in\mathcal{A}} \cdots \sum_{a_m\in\mathcal{A}} Q_m(a_1,a_2,\ldots,a_m)^{-2\alpha} = 1\,.$$

Alors la limite de $\alpha_{m,\mathcal{A}}$ quand m tend vers l'infini existe et vaut la dimension de Hausdorff de $F(\mathcal{A})$ muni de la métrique induite par la distance sur $\mathbf{R}$.

En fait, la preuve qui mène à ce résultat est très instructive. En notant

$$\Sigma_m(\alpha) = \sum_{a_1\in\mathcal{A}} \cdots \sum_{a_m\in\mathcal{A}} Q_m(a_1,a_2,\ldots,a_m)^{-2\alpha}$$

nous constatons en utilisant (6) que $\Sigma_{m+\ell}(\alpha) \leq \Sigma_m(\alpha)\Sigma_\ell(\alpha)$. Par ailleurs $\Sigma_m(\alpha)$ décroît en α et par conséquent, si $\Sigma_m(\alpha_1) \geq 1$, alors $\alpha_{m,\mathcal{A}} \geq \alpha_1$. Or

$$\Sigma_m(\alpha) \geq N^{-2m\alpha} F_m^{-2\alpha} |\mathcal{A}|^m$$

où F_m est le m-ième nombre de Fibonacci. Nous souhaitons donc avoir

$$-2(\operatorname{Log} N + \frac{1}{m}\operatorname{Log} F_m)\alpha + \operatorname{Log}|\mathcal{A}| \geq 0$$

ce qui nous garantit que

$$\dim_{\mathrm{h}} F(\mathcal{A}) \geq \frac{\operatorname{Log}|\mathcal{A}|}{2(\operatorname{Log} N + \operatorname{Log} \frac{1+\sqrt{5}}{2})} .$$

Cette minoration nous montre en particulier que cette dimension est strictement positive.

Notons dans l'autre sens que $d = \dim_{\mathrm{h}} F(\mathcal{A}) \leq 1/2$ pour certains alphabets $\mathcal{A}$, par exemple $\mathcal{A} = \{1,4\}$. Cela résulte de la remarque suivante: s'il existe des m arbitrairement grands pour lesquels $\Sigma_m(\alpha) < 1$, alors $\alpha \geq d$; dans le cas contraire, en effet, puisque $\lim_m \alpha_m = d$, $\alpha < \alpha_m$ et $\Sigma_m(\alpha) \geq \Sigma_m(\alpha_m) = 1$ pour m assez grand. Par ailleurs dès que $\Sigma_m(\alpha) < 1$ pour un m fixé, nous avons $\Sigma_{km}(\alpha) < 1$ pour tout $k \geq 1$. En prenant $m = 6$ dans l'exemple précédent, nous obtenons alors $d \leq 0.492$.

4. Une mesure spéciale

Dans la construction de la mesure qui nous intéresse, nous allons éliminer du support les points pour lesquels $\operatorname{Log} Q_m$ est trop loin de sa valeur moyenne, auquel cas les deux structures considérées sur $F(\mathcal{A})$ seront vraiment similaires.

Soit $\delta < \dim_{\mathrm{h}} F(\mathcal{A})$. Le théorème 3.1 et la définition de la dimension de Hausdorff nous assurent que

$$\lim_{m\to\infty} \Sigma_m(\delta) = \lim_{m\to\infty} \sum_{a_1\in\mathcal{A}} \cdots \sum_{a_m\in\mathcal{A}} Q_m(a_1, a_2, \ldots, a_m)^{-2\delta} = +\infty ;$$

nous pouvons trouver m assez grand pour que $\Sigma_m(\delta) \geq 8$. Fixons provisoirement m ainsi et regardons $F(\mathcal{A})$ comme formé à partir des blocs $\mathcal{A}^m$.

Nous munissons le bloc $\mathcal{A}^m$ de la mesure de probabilité discrète $\nu_m = \nu_{m,\delta}$ définie par

$$\nu_m(\{a_1, \ldots, a_m\}) = Q_m(a_1, a_2, \ldots, a_m)^{-2\delta} / \Sigma_m(\delta) .$$

Soit alors $m\sigma_m(\delta)$ la moyenne de $\operatorname{Log} Q_m(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ pour cette mesure. Comme

$$\operatorname{Log} Q_m(a_1, a_2, \ldots, a_m) \geq \operatorname{Log} Q_m(1, 1, \ldots, 1) \geq (m-1) \operatorname{Log} \sqrt{2} \tag{7}$$

nous avons $m\sigma_m(\delta) \geq (m-1) \operatorname{Log} \sqrt{2}$.