2.2 Action d'un endomorphisme et ramification

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

2.2 Action d'un endomorphisme et ramification

Si $f\colon M \to M$ est une application holomorphe surjective de M, la transformation f^* consistant à prendre l'image réciproque d'une forme holomorphe par f définit un élément du groupe linéaire $\mathbf{GL}(\mathrm{H}^0(M, K_M))$. En notant F la transformation projective associée à f^*, on a la relation

$$F \circ \Theta_1 = \Theta_1 \circ f\,. \tag{3}$$

Cette remarque est valable en remplaçant K_M par ses puissances tensorielles positives $K_M^{\otimes k}$, Θ_1 par Θ_k et F par l'action F_k de f sur les sections de $K_M^{\otimes k}$. Lorsque la dimension de Kodaira de M est strictement positive, il existe ainsi une fibration méromorphe invariante par tout endomorphisme. L'action sur la base de la fibration est linéaire : c'est la restriction de F_k à l'image de Θ_k. Le théorème suivant, pour lequel nous renvoyons à [28], § VI, et à [18], § 7.6, se déduit facilement de ce qui vient d'être dit.

Théorème 2.1. *Soient M une variété complexe compacte dont la dimension de Kodaira est positive ou nulle et $\Theta_k\colon M \dashrightarrow \mathbf{P}(H^0(M, K_M^{\otimes k})^*)$, $k > 0$, les applications pluricanoniques. Si f est une transformation holomorphe surjective de M, il existe une transformation projective périodique F_k de $\mathbf{P}(H^0(M, K_M^{\otimes k})^*)$ telle que $\Theta_k \circ f = F_k \circ \Theta_k$.*

Remarque 2.1. Ceci montre que les endomorphismes des variétés complexes compactes dont la dimension de Kodaira est strictement positive se réduisent à des variétes de dimension inférieure. Les cas intéressants se situent donc en dimension de Kodaira 0 et $-\infty$. Lorsque la dimension de Kodaira de M est maximale, *i.e.* $\mathrm{kod}(M) = \dim_{\mathbf{C}}(M)$, les fibres génériques de l'application Θ_k sont finies ; par conséquent, tout endomorphisme de M est inversible et le groupe des automorphismes de M est fini (voir [18], § 7).

Si $f\colon M \to M$ est une transformation holomorphe surjective d'une variété complexe compacte, le diviseur de ramification R_f de f est défini comme l'ensemble des points au voisinage desquels f n'est pas un difféomorphisme local sur son image. C'est le lieu d'annulation du jacobien de f, donc R_f est l'ensemble vide ou un diviseur. Le théorème suivant montre que R_f est vide dès que la dimension de Kodaira de M est positive ou nulle. La référence la plus ancienne que je connaisse pour ce résultat est l'article [23] de Klaus Peters.

THÉORÈME 2.2 (K. Peters). *Soit M une variété complexe compacte dont la dimension de Kodaira est positive ou nulle. Toute application holomorphe surjective de M dans M est un revêtement non ramifié.*

Démonstration. Supposons que R_f n'est pas vide et fixons une section non nulle ω de $K_M^{\otimes k}$, pour k positif convenable. L'image réciproque de ω par l'itéré $n^{\text{ème}}$ de f est une section de $K_M^{\otimes k}$ qui s'annule sur l'union des diviseurs effectifs R_f, $f^{-1}(R_f)$, $\ldots$, $f^{-n-1}(R_f)$. Puisque f est surjective, on obtient ainsi des sections du fibré en droites $K_M^{\otimes k}$ dont le lieu des zéros (comptés avec multiplicité) croît indéfiniment. Ceci est impossible.

2.3 FIBRATION D'ALBANESE

Pour les variétés kählériennes, il existe une deuxième fibration naturelle invariante par tout endomorphisme : la fibration d'Albanese. Notons $\mathrm{H}^0(M, \Omega_M^1)$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel constitué des 1-formes holomorphes globales de M. Puisque M est supposée kählérienne, chaque forme holomorphe est fermée. En particulier, lorsque γ est un lacet de M, l'intégration d'une 1-forme holomorphe

$$\omega \mapsto \int_\gamma \omega$$

ne dépend que de la classe d'homologie $[\gamma] \in \mathrm{H}^1(M, \mathbf{Z})$. La théorie de Hodge montre que la partie sans torsion de $\mathrm{H}^1(M, \mathbf{Z})$ se plonge de cette manière en un réseau cocompact de $\mathrm{H}^0(M, \Omega_M^1)^*$. Le tore complexe obtenu en quotientant $\mathrm{H}^0(M, \Omega_M^1)^*$ par ce réseau sera noté $\mathsf{Alb}(M)$: c'est la variété d'Albanese de M.

Choisissons un point base x dans M. Si y est un point de M et ω est une 1-forme fermée, l'intégrale de ω entre x et y dépend du chemin d'intégration choisi, mais les différentes valeurs obtenues coïncident modulo l'intégration de ω sur les lacets basés en x. On dispose ainsi d'une application holomorphe

$$\mathsf{a}_M \colon M \to \mathsf{Alb}(M), \quad y \mapsto \int_x^y \tag{4}$$

pour chaque choix d'un point base x dans M. C'est la fibration d'Albanese de M. Elle est équivariante sous l'action de tout endomophisme f, l'action induite par f sur $\mathsf{Alb}(M)$ étant la transformation affine associée à l'action de f par image réciproque sur les 1-formes holomorphes (le paramètre de translation provient du choix du point base x).

Pour trouver des endomorphismes non inversibles qui ne préservent aucune fibration, on peut donc supposer que la fibration d'Albanese de M est triviale, c'est-à-dire que ses fibres sont finies ou que l'image est un point. Dans