

§1. Notation and definitions

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

me to write this paper. I also appreciate the hospitality of IHES, which made possible my involvement in this story. I am especially thankful to Dennis Sullivan, who took pains to read the paper and to clean it up of multiple errors.

STRUCTURE OF THE PAPER. We start with a geometric outlook on topological entropy and reduce our inequality (0.1) to standard facts about minimal varieties. We discuss next the real algebraic analogue of (0.1) and a generalization to maps. We conclude with an estimate of the entropy involving the mean curvature.

§1. NOTATION AND DEFINITIONS

For a space X we denote by X^k the product $X \times X \times \dots \times X$ (k factors). A *graph* Γ over X is by definition an arbitrary set $\Gamma \subset X^2$. When X is finite this is the usual definition of an oriented graph (with loops). The graph of a map $X \rightarrow X$ gives another example.

For a graph Γ we denote by $\Gamma_k \subset X^k$ the set of strings $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k)$, $x_i \in X$, where each pair $(x_{i-1}, x_i) \in X^2$ is contained in Γ .

When X is endowed with a metric, we call ϵ -cubes products in X^k of balls from X of radius ϵ . For a set $Y \subset X^k$ we denote by $\text{Cap}_\epsilon Y$ the minimal number of ϵ -cubes needed to cover Y .

ENTROPY

Set $h_\epsilon(\Gamma) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \text{Cap}_\epsilon \Gamma_k$, and $h(\Gamma) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_\epsilon(\Gamma)$, for $\Gamma \subset X^2$.

When f is an endomorphism $X \rightarrow X$, we define its *entropy* $h(f)$ as the entropy of its graph Γ_f . If the space X is compact, the definition does not depend on the choice of the metric [2]. Observe that the entropy of a general graph Γ is equal to the entropy of the shift in $\Gamma_\infty \subset X^\infty$: Γ_∞ is the space of doubly infinite strings $(x_i)_{i=\dots, -1, 0, 1, \dots}$ with the product topology, and the shift maps (x_i) to (x_{i+1}) . For finite X , we come to the usual definition of the Markov shift.

VOLUME

From now on, X is a Riemannian manifold and $n = \dim X$, $\Gamma \subset X^2$. We denote by $\text{Vol} \Gamma_k$ the n -dimensional volume of $\Gamma_k \subset X^k$, i.e. the

n -dimensional Hausdorff measure with respect to the Riemann product metric in X^k . Set

$$\text{lov } \Gamma = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \text{Vol } \Gamma_k.$$

For an f we set $\text{lov } f = \text{lov } \Gamma_f$. This is a smooth invariant of f (it does not depend on the choice of the Riemann metric).

Our invariant "lov" is sometimes more accessible than entropy and for a holomorphic f we are going to prove that

$$(1.0) \quad h(f) \leq \text{lov } f.$$

DENSITY

Denote by $\text{Dens}_\epsilon(\Gamma_k, \gamma)$, for $\gamma \in \Gamma_k \subset X^k$, the n -dimensional measure of the intersection of Γ_k with the ball (in the Riemannian product metric) of radius ϵ centered at γ . Set $\text{Dens}_\epsilon(\Gamma_k) = \inf_{\gamma \in \Gamma_k} \text{Dens}_\epsilon(\Gamma_k, \gamma)$, and then $\text{lodn}_\epsilon \Gamma = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \text{Dens}_\epsilon \Gamma_k$, and finally

$$\text{lodn } \Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{lodn}_\epsilon \Gamma.$$

Observe that $\text{Vol} \geq \text{Cap}_{2\epsilon} \text{Dens}_\epsilon$ and hence that

$$(1.1) \quad h(V) \leq \text{lov } \Gamma - \text{lodn } \Gamma.$$

§2. ESTIMATES OF DENSITY

Consider a Riemannian manifold W (it will be X^k in the sequel) and an n -dimensional subvariety $V \subset W$. We suppose that the boundary of V (if there is such) does not intersect the ball $B_\epsilon \subset W$ of radius $\epsilon > 0$ centered at a point $v_0 \in V$. We suppose also that the injectivity radius of W at v_0 is at least ϵ , i.e. the exponential map $T_{v_0}(W) \rightarrow W$ is injective in the ϵ -ball in $T_{v_0}(W)$.

DENSITY OF A MINIMAL VARIETY

If the sectional curvature in B_ϵ is not greater than K and V is minimal, then

$$(2.0) \quad \text{Vol}(V \cap B_\epsilon) \geq C > 0,$$

where the constant C depends on n , K , and ϵ , but does not depend on $\dim W$.