2. La solution de minimax

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

DÉFINITION. On appelle *max-min* de f le nombre

$$\max\min(f) := \sup\{\lambda \in \mathbf{R} \mid j_\lambda^* \Delta \neq 0\} = -\min\max(-f)\,.$$

THÉORÈME 1.9. *Le minimax de f coïncide avec le max-min.*

Démonstration. D'après le Théorème 1.8 on peut supposer f générique, donc de Morse excellente. Alors on déduit de la Proposition 1.5 que f et $-f$ ont le même point critique libre. □

Le résultat suivant sera utile plus loin.

PROPOSITION 1.10. *Soit f une fonction excellente, $\bar{\xi}$ un point critique dégénéré de f, de valeur critique $c := f(\bar{\xi})$. Supposons que pour tout $\epsilon > 0$ il existe deux déformations g, h de f telles que :*

(i) *g et h sont ϵ-proches de f ;*

(ii) *g n'a aucune valeur critique dans $]c-\epsilon, c+\epsilon[$;*

(iii) *h a deux valeurs critiques, $c_1 = f(\bar{\xi}_1)$ et $c_1 = f(\bar{\xi}_2)$ dans $]c-\epsilon, c+\epsilon[$, telles que ξ_1 et ξ_2 sont non dégénérés.*

Alors ξ_1 et ξ_2 sont liés.

Démonstration. Le même argument que pour la preuve du Théorème 1.8 (où l'on considère $E^{c-\epsilon}$ au lieu de $E^{-\infty}$) montre que

$$\widetilde{H}_*(E_g^{c+\epsilon}, E_g^{c-\epsilon}) \simeq \widetilde{H}_*(E_h^{c+\epsilon}, E_h^{c+\epsilon})\,.$$

Or, d'après le Théorème 1.2, on a $\widetilde{H}_*(E_h^{c+\epsilon}, E_h^{c-\epsilon}) = 0$. Par conséquent $\widetilde{H}_*(E_g^{c+\epsilon}, E_g^{c-\epsilon}) = 0$, c'est-à-dire ξ_1 et ξ_2 sont incidents. Il s'ensuit que ξ_1 et ξ_2 sont liés (Proposition 1.3). □

2. LA SOLUTION DE MINIMAX

2.1 RAPPELS DE GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE

Soit X une variété différentielle de dimension n, $T^*X = \{(x;y)\}$ le fibré cotangent[3]) de X, $\pi\colon T^*X \to X$ la projection naturelle $(x,y) \mapsto x$. Le fibré T^*X, muni de la forme symplectique canonique $dy \wedge dx$, est une variété symplectique de dimension $2n$.

---

[3]) Pas nécessairement trivial.

On appelle *isotopie hamiltonienne*[4]) le flot au "temps" T d'un hamiltonien

$$h\colon [0,T]\times T^*X \to T^*X\,.$$

Deux sous-variétés du fibré cotangent sont *isotopes* s'il existe une isotopie qui transforme l'une dans l'autre. Une sous-variété de T^*X est *lagrangienne* si sa dimension est égale à la dimension de la base X du fibré et si la forme symplectique s'annule sur cette sous-variété. Une isotopie transforme des sous-variétés lagrangiennes en sous-variétés lagrangiennes.

DÉFINITION. Une *famille génératrice* (globale) d'une sous-variété lagrangienne L du fibré cotangent est une famille de fonctions $\{S_\xi\colon X\to \mathbf{R}\}_{\xi\in\mathbf{R}^K}$, dépendant des paramètres $\xi\in\mathbf{R}^K$, telle que:

- la fonction $S\colon X\times\mathbf{R}^K\to\mathbf{R}$, définie par $S(x;\xi):=S_\xi(x)$, est de classe C^2;
- 0 est une valeur régulière de l'application $(x;\xi)\mapsto \partial_\xi S(x;\xi)$, c'est-à-dire:

$$\operatorname{rk}\left(\partial^2_{\xi\xi}S,\partial^2_{\xi x}S\right)|_{\{\partial_\xi S=0\}}=K\,.$$

- la famille engendre la sous-variété lagrangienne

$$L=\left\{\left(x,\partial_x S(x;\bar\xi)\right)\mid \exists\,\bar\xi\in\mathbf{R}^K:\partial_\xi S(x;\bar\xi)=0\right\}.$$

Etant donnée une famille génératrice $S\colon X\times\mathbf{R}^K\to\mathbf{R}$ d'une sous-variété lagrangienne, les opérations suivantes permettent de construire une nouvelle famille génératrice T (de paramètres η) de la même sous-variété:

(o) *Addition d'une constante:* si $C\in\mathbf{R}$, on pose $\eta=\xi$ et $T(x;\eta)=S(x;\xi)+C$;

(i) *Stabilisation:* si $K'\in\mathbf{N}$ et Q est une forme quadratique non dégénérée de $\mathbf{R}^{K'}$, on pose $\eta=(\xi,\xi')$ et $T(x;\eta)=S(x;\xi)+Q(\xi')$;

(ii) *Difféomorphisme:* si $(x;\eta)\mapsto(x,\xi(x,\eta))$ est un difféomorphisme préservant les fibres du fibré trivial $X\times\mathbf{R}^K\to X$, on pose $T(x;\eta)=S(x;\xi(x,\eta))$.

On remarque que l'opération de stabilisation augmente le nombre de paramètres de la famille génératrice.

DÉFINITION. On dit que deux familles génératrices sont *équivalentes* si l'on peut obtenir l'une à partir de l'autre à l'aide d'une suite d'opérations (o), (i) et (ii).

---

[4]) Dans la suite on ne considérera que des isotopies hamiltoniennes.

En fait, il se trouve que si deux familles sont équivalentes, on peut obtenir l'une de l'autre par une stabilisation, suivie d'un difféomorphisme et de l'addition d'une constante.

DÉFINITION. Une famille génératrice est *quadratique à l'infini* (fgqi) s'il existe une forme quadratique non dégénérée Q_∞ telle que $S(x;\xi) = Q_\infty(\xi)$, pour $|\xi|$ assez grand.

Les fgqi sont une classe très importante de fonctions génératrices pour le résultat suivant d'existence (dû à Sikorav, voir [Sik]) et d'unicité (dû à Viterbo, voir [Vi1], [The]).

THÉORÈME D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ DE SIKORAV-VITERBO. *Si X est une variété fermée*[5]*, toute sous-variété lagrangienne de T^*X isotope à la section nulle $\{(x;0) \mid x \in X\}$ admet une fgqi; de plus, toutes les fgqi d'une telle sous-variété sont équivalentes.*

REMARQUES.

(1) Le théorème reste vrai dans le cas des variétés non compactes si l'isotopie est à support compact ou, ce qui revient au même, si la variété est transversale à la base X en dehors d'un compact, c'est-à-dire si la projection π est une bijection entre L et X.

(2) Il existe une version de contact (pour les sous-variétés legendriennes de J^1X) du théorème d'existence de Sikorav, dû à Yu. Chekanov ([Ch1]), mais pas, à ma connaissance, pour le théorème d'unicité de Viterbo.

DÉFINITION. Soit $\Sigma_L := \{(x,y) \in L \mid \operatorname{rk} D\pi(x,y) < \dim X\}$ l'ensemble des *points singuliers* de L. La *caustique* de L est la projection $\pi(\Sigma_L)$ sur X de l'ensemble des points singuliers.

Génériquement, l'ensemble des points singuliers est l'union de la variété régulière de codimension 1 des points singuliers simples (où le rang de $D\pi$ est $\dim X - 1$) et d'une réunion finie de variétés de codimension au moins 3 (voir [Ar1]).

On rappelle que L est *exacte* si la 1-forme de Liouville $y\,dx$, restreinte à L, est exacte, c'est-à-dire s'il existe une fonction $\zeta\colon L \to \mathbf{R}$ telle que $y\,dx|_L = d\zeta$. Si c'est le cas, on peut associer à L une sous-variété legendrienne

[5]) C'est-à-dire compacte et sans bord.

$\widehat{L}$ de l'espace $J^1X = \{(x,z,y)\}$ des jets d'ordre 1 sur X (muni de la forme de contact standard $dz - y\,dx$), définie à une constante en z près :

$$\widehat{L} := \{(q,\zeta(q,p),p) \mid (q,p) \in L\}\,.$$

DÉFINITION. On appelle *front d'onde* ou *diagramme de Cerf* de L l'image F_L de $\widehat{L}$ par la projection $(x,z,y) \mapsto (x,z)$ dans l'espace $J^0X = \{(x,z)\}$ des jets d'ordre 0 sur X.

Soit $S(x;\xi)$ une fgqi de L.

DÉFINITION. L'*ensemble de Maxwell* M_L de L est l'ensemble des points $x \in X$ tels que la fonction de Morse $\xi \mapsto S(x;\xi)$ n'est pas excellente.

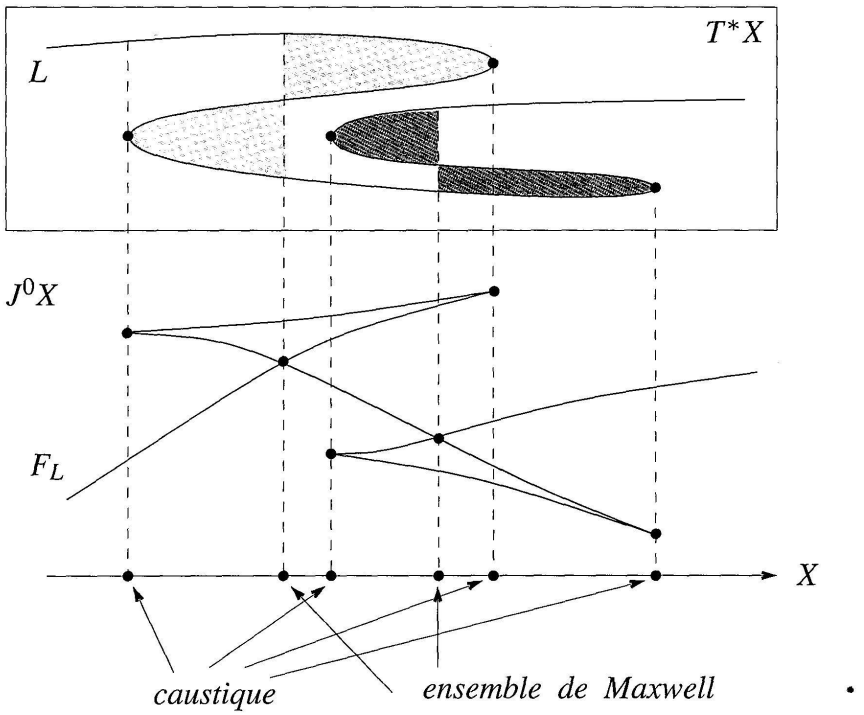

FIGURE 4

Caustique et ensemble de Maxwell d'une courbe lagrangienne et du front associé

REMARQUES.

(1) D'après le théorème d'unicité de Viterbo, l'ensemble de Maxwell ne dépend que de L.

(2) La projection naturelle $F_L \to X$ est une fibration en dehors de la caustique et de l'ensemble de Maxwell (cf. Figure 4).

(3) L'ensemble de Maxwell d'une sous-variété lagrangienne générique est une hypersurface stratifiée (c'est-à-dire une réunion finie de variétés lisses, les *strates*, connexes par arcs, deux à deux disjointes, telles que la fermeture de chaque strate est la même strate et une réunion finie de strates de dimension plus petite), voir [Ar2].

(4) La caustique et l'ensemble de Maxwell d'une sous-variété lagrangienne générique ont mesure nulle.

2.2 La solution géométrique de (PC)

Considérons le problème de Cauchy pour l'équation de Hamilton-Jacobi sur une variété Q (sans bord, mais pas forcément compacte) de hamiltonien $H : [0,+\infty[\times T^*Q \to \mathbf{R}$ de classe C^2 dans $]0,+\infty[\times T^*Q$ et continue au bord, et donnée initiale $u_0 : Q \to \mathbf{R}$ de classe C^1 :

$$(PC) \qquad \begin{cases} \partial_t u(t,q) + H(t,q,\partial_q u(t,q)) = 0, & \forall\ t>0,\ q \in Q \\ u(0,q) = u_0(q), & \forall\ q \in Q\,. \end{cases}$$

Dans cette section on construit une sous-variété lagrangienne du fibré cotangent de l'espace temps, la solution géométrique de (PC). Le théorème de Sikorav-Viterbo permet de lui associer une "unique" fgqi $S(t,q;\xi)$. Cette fonction est définie à une constante additive près; une fois cette constante convenablement fixée, S est une solution, en générale multivoque, de (PC). Son graphe[6])

$$\{(t,q,S(t,q;\bar\xi) \mid \partial_\xi S(t,q;\bar\xi) = 0\}$$

est le front d'onde de la solution géométrique.

Dans la prochaine section on utilisera la méthode de minimax pour choisir en tout point (t,q) un unique point critique de $\xi \mapsto S(t,q;\xi)$; on obtiendra de cette manière une section du front, qui s'avère être le graphe d'une fonction bien définie, solution faible de (PC).

Sur le fibré cotangent $T^*Q = \{(q,p)\}$, muni de la forme symplectique canonique $dp \wedge dq$, le champ hamiltonien $X_H = (\partial_p H, -\partial_q H)$ induit le flot $\phi : [0,+\infty[\times T^*Q \to T^*Q$. Ses composantes $\phi^t(q,p) = (\tilde q(t),\tilde p(t))$, que l'on appelle les *caractéristiques* de X_H, sont les solutions des équations de Hamilton

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\tilde q(t) = \partial_p H(t,\tilde q(t),\tilde p(t))\,, \\ \frac{d}{dt}\tilde p(t) = -\partial_q H(t,\tilde q(t),\tilde p(t))\,, \end{cases}$$

telles que $\tilde q(0) = q$ et $\tilde p(0) = p$.

---

[6]) Plus précisément, le contour apparent du graphe de S, projection le long de l'axe des ξ.

Soit $\Lambda_0 := \{(q, du_0(q)) \mid q \in Q\}$ la sous-variété lagrangienne de T^*Q engendrée par la donnée initiale, et $\Lambda_t := \phi^t(\Lambda_0)$ son évoluée au temps t.

REMARQUES.

(1) La sous-variété Λ_0 est isotope à la section nulle de T^*Q, l'isotopie étant engendrée par l'hamiltonien $-u_0$.

(2) Chaque Λ_t est isotope à la section nulle de T^*Q; en effet Λ_t est isotope à Λ_0 par l'isotopie ϕ^{-t}, et les isotopies forment un groupe.

(3) Il s'ensuit que Λ_t est exacte et, d'après le théorème de Viterbo, admet une unique fgqi $S_t(q;\xi)$.

Considérons maintenant la variété "espace-temps" $\mathcal{Q} := \mathbf{R} \times Q$, et son fibré cotangent $T^*\mathcal{Q} = \{(t, q; \tau, p)\}$, muni de la forme symplectique $dp \wedge dq + d\tau \wedge dt$. Le hamiltonien autonome $\mathcal{H}(t, q; \tau, p) := \tau + H(t, q, p)$ engendre le flot Φ: $[0, +\infty[\times T^*\mathcal{Q} \to T^*\mathcal{Q}$, de composantes

$$\Phi^s(t, q; \tau, p) = \big(t + s, \tilde{q}(t + s); \tilde{\tau}(t + s), \tilde{p}(t + s)\big),$$

où $\tilde{q}, \tilde{p}$ sont les caractéristiques de X_H telles que $\tilde{q}(t) = q$ et $\tilde{p}(t) = p$, et $\tilde{\tau}(t) = -H\big(t, \tilde{q}(t), \tilde{p}(t)\big)$.

Pour tout $t \geq 0$, considérons l'application

$$i_t : T^*Q \to T^*\mathcal{Q}, \qquad (q, p) \mapsto (t, q; -H(t, q, p), p).$$

Un calcul direct montre que la variété que l'on obtient par la réunion des courbes caractéristiques du flot Φ, sortant de $i_0(\Lambda_0)$,

$$\Lambda := \bigcup_{s>0} \Phi^s\big(i_0(\Lambda_0)\big) \subset T^*\mathcal{Q},$$

est lagrangienne. De même, pour tout $T > 0$ fixé, la sous-variété de $T^*\mathcal{Q}$

$$\Lambda^T := \bigcup_{0<s<T} \Phi^s\big(i_0(\Lambda_0)\big)$$

est aussi lagrangienne.

DÉFINITION. On appelle Λ la *solution géométrique* de (PC), et Λ^T la *solution géométrique tronquée* au temps T.

REMARQUE. Pour s fixé, Φ^s translate Λ d'un temps s le long les caractéristiques, c'est-à-dire :

$$\Phi^s\big(i_t(\Lambda_t)\big) = \Phi^s \circ \Phi^t\big(i_0(\Lambda_0)\big) = \Phi^{s+t}\big(i_0(\Lambda_0)\big) = i_{s+t}(\Lambda_{t+s})$$

(propriété de semi-groupe du flot).

THÉORÈME 2.1. *Pour tout $T > 0$, la solution géométrique tronquée au temps T est isotope à la section nulle $\{(t, q; 0, 0) \mid -T < t < 0, q \in Q\}$.*

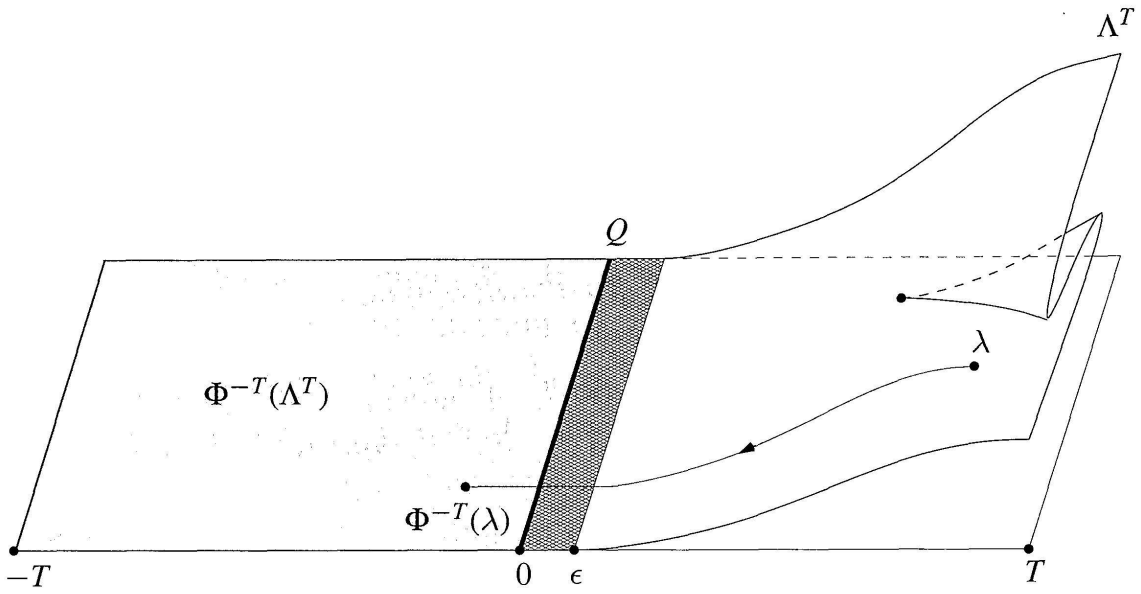

FIGURE 5
L'isotopie entre la solution géométrique tronquée et la section nulle

Démonstration. Puisque pour des temps petits il existe une solution classique de (PC), il est facile de se ramener, par une isotopie, au cas où la solution géométrique Λ coïncide avec la section nulle pour tout temps inférieur à un certain $\epsilon > 0$ assez petit. Alors pour tout $t < \epsilon' < \epsilon$, on a $H(t, q, p) = 0$. On peut considérer l'extension suivante de H, de classe C^2 :

$$\widetilde{H}(t, q, p) := \begin{cases} H(t, q, p), & \text{pour tout } t \geq 0,\ (q, p) \in T^*Q, \\ 0 & \text{pour tout } t \leq 0,\ (q, p) \in T^*Q. \end{cases}$$

Le flot $\widetilde{\Phi}$ engendré par $\widetilde{\mathcal{H}} := \tau + \widetilde{H}$ étend le flot Φ à $\mathbf{R}$ tout entier. La sous-variété lagrangienne

$$\widetilde{\Lambda} := \bigcup_{s \in \mathbf{R}} \widetilde{\Phi}^s(i_0(\Lambda_0))$$

de T^*Q coïncide avec Λ dans le demi-espace $\{t > 0\}$ et avec la section nulle dans $\{t < 0\}$. Par conséquent, pour tout $T > 0$ fixé, $\widetilde{\Phi}^{-T}$ est une isotopie entre Λ^T et la section nulle (cf. Figure 5). □

On peut ainsi appliquer le théorème de Sikorav-Viterbo aux solutions géométriques tronquées de (PC).

COROLLAIRE. *Pour tout $T > 0$ fixé, Λ^T admet une unique fgqi $S(t, q; \xi)$ (modulo les opérations d'équivalence* (i) *et* (ii)*), telle que son graphe restreint à $t = 0$ coïncide avec le graphe de la donnée initiale u_0.*

Dans la suite, S sera toujours une telle fgqi.

Démonstration. Soit $\widetilde{S}(t, q; \xi)$ l'unique fgqi de Λ^T. Or, cette fonction est une primitive de la forme de Liouville $p\,dq$ de Λ_0 :

$$d\widetilde{S}(0, q; \bar{\xi}_0(q)) = du_0(q)\,dq\,,$$

où $\bar{\xi}_0(q)$ est le seul point critique de $\xi \mapsto S_0(q; \xi)$. Par conséquent il existe une unique constante C telle que $S := \widetilde{S} + C$ vérifie $S(0, q; \bar{\xi}_0(q)) = u_0(q)$ pour tout $q \in Q$. □

REMARQUE. On peut construire une famille génératrice globale de la solution géométrique Λ comme suit. La *fonctionnelle d'action* $\int pdq - Hdt$ est une famille génératrice formelle (l'espace de paramètre étant de dimension infinie) de Λ. En utilisant une méthode de point fixe, proposée par Amann-Conley-Zehnder, on obtient une vraie fonction génératrice, voir [Car].

2.3 LA SOLUTION DE MINIMAX

Soient $t > 0, q \in Q$ et $S(t, q; \xi)$ la fgqi de la solution géométrique tronquée Λ^T, pour $T > t$. La fonction $\xi \mapsto S(t, q; \xi)$ est quadratique à l'infini, donc on peut lui associer le niveau critique de minimax, étudié au § 1.3.

DÉFINITION (Chaperon). On appelle *solution de minimax* de (PC) la fonction

$$u(t, q) := \min \max \{\xi \mapsto S(t, q; \xi)\}\,.$$

REMARQUE. L'autre solution que l'on peut construire avec ce même argument (cf. [Cha]), *la solution de max-min* est, pour le Théorème 1.9, la même solution.

M. Chaperon ([Cha]), T. Joukovskaïa ([Jou]), C. Viterbo ([Vi2]) ont étudié les propriétés de cette fonction; en particulier Joukovskaïa a classifié les singularités génériques de u en dimension petite ($\dim Q \leq 2$).

THÉORÈME 2.2 (Chaperon). *La solution de minimax est une solution faible*[7]) *de (PC), lipschitzienne sur chaque intervalle compact* $[0,T]$, *et indépendante du choix de la fgqi.*

REMARQUE. Pour le Théorème 1.8, on peut supposer, sans perte de généralité, que la solution géométrique de (PC) soit générique. Dans ce cas l'ensemble $\pi(\Sigma) \cup M_\Lambda$ est de mesure nulle.

Démonstration. Soit Λ générique. La continuité de la solution de minimax u est une conséquence immédiate de la stabilité du minimax par petites déformations. En effet, fixons un point (t_0, q_0) de l'espace-temps et un $\epsilon > 0$. Pour tout (t,q) assez proche de (t_0,q_0), la fonction $\xi \mapsto S(t,q;\xi)$ est une perturbation de $\xi \mapsto S(t_0,q_0;\xi)$ aussi petite que l'on veut. D'après le Théorème 1.8, on déduit que $|u(t_0,q_0) - u(t,q)| < \epsilon$.

Les autres propriétés de la solution de minimax sont simples à démontrer; on renvoie pour les détails aux travaux déjà cités.

Soit $(t_0,q_0) \notin M_\Lambda$, $t_0 > 0$. Par le théorème de la fonction implicite il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de (t_0,q_0) dans $]0,+\infty[\times Q$ où le point critique libre de $\xi \mapsto S(t,q;\xi)$ est une fonction $\bar{\xi}(t,q)$ de classe C^1, définie par $\partial_\xi S(t,q;\xi) = 0$. Alors pour tout $(t,q) \in \mathcal{U}$ on a $u(t,q) = S(t,q;\bar{\xi}(t,q))$, donc u est de classe C^1, et vérifie l'équation de Hamilton-Jacobi; en effet

$$\partial_t u(t,q) = \partial_t S(t,q;\bar{\xi}(t,q)), \quad \partial_q u(t,q) = \partial_q S(t,q;\bar{\xi}(t,q)),$$

et par définition de fgqi on a $\partial_t S(t,q;\bar{\xi}(t,q)) + H(t,q,\partial_q S(t,q;\bar{\xi}(t,q))) = 0$. Donc, en dehors de l'ensemble de Maxwell de Λ, u est dérivable et vérifie l'équation de Hamilton-Jacobi. La solution de minimax satisfait la donnée initiale, parce que l'on a choisi la fgqi de la solution géométrique telle que $S(0,q;\bar{\xi}_0(q)) = u_0(q)$, où $\bar{\xi}_0(q)$ est le seul point critique de $\xi \mapsto S(0,q;\xi)$.

Pour tout $0 < T < +\infty$, $u|_{[0,T]}$ est lipschitzienne: en effet H et u_0 sont lipschitziens, donc en un temps fini les espaces tangents aux fronts d'onde ne sont jamais verticaux.

On déduit enfin du théorème de Viterbo que u ne dépend pas du choix de S parmi les fgqi de Λ telles que $S(0,q;\bar{\xi}(q)) = u_0(q)$. □

REMARQUE. Viterbo a montré que les mêmes résultats restent vrais pour hamiltoniens et données initiales seulement lipschitziens, voir [Vi2]. On approche H et u_0 par des suites de fonctions $\{H_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ et $\{u_{0,n}\}_{n\in\mathbf{N}}$,

---

[7]) C'est-à-dire u est continue et presque partout dérivable, et en ces points vérifie l'équation de Hamilton-Jacobi; de plus u satisfait la donnée initiale.

suffisamment régulières, convergentes vers H et u_0 respectivement. Pour chaque $n \in \mathbf{N}$ on construit la solution de minimax u_n du problème de Cauchy de hamiltonien H_n et donnée initiale $(u_{0,n})$; il suit que la limite $\lim_{n\to+\infty} u_n$ est la solution de minimax du problème de Cauchy de hamiltonien H et donnée initiale u_0.

3. Caractérisation géométrique de la solution de minimax

3.1 Notations

Soit $J^0\mathbf{R} = \{(q,z)\} \simeq \mathbf{R}^2$ l'espace des jets d'ordre 0 sur $\mathbf{R}$, $\pi_0 : J^0\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la projection naturelle $(q,z) \mapsto q$. Un front d'onde dans $J^0\mathbf{R}$ est la projection dans $J^0\mathbf{R}$ d'une courbe legendrienne de $J^1\mathbf{R} = \{(q,z,p)\} \simeq \mathbf{R}^3$ par $\pi_1 : (q,z,p) \mapsto (q,z)$. Pour un front générique, les seules singularités possibles sont des cusps et des auto-intersections transverses.

Soit F un front de $J^0\mathbf{R}$. On appelle *section* de F toute partie connexe maximale σ qui est le graphe d'une fonction $\chi_\sigma : \pi_0(\sigma) \to \mathbf{R}$ de classe C^1 par morceaux. Une *branche* de F est une section de classe C^1.

Un front est *long* si, en dehors d'un compact de $\mathbf{R}$, il est le graphe d'une fonction, *plat* si sa tangente n'est jamais verticale. On peut dans ce cas coorienter le front en fixant en tout point le vecteur orthonormal dont la coordonnée en z est positive. Si le front est ainsi orienté, on peut distinguer deux types de cusp : *montant*, si en suivant le front, on passe d'une branche à l'autre en la direction de la normale fixée, *descendent* si on passe en la direction opposée.

Deux courbes legendriennes de $J^1\mathbf{R}$ sont *isotopes* (par une isotopie *legendrienne*) s'il existe un chemin de l'une à l'autre dans l'espace des courbes legendriennes plongées de $J^1\mathbf{R}$. Pour la famille correspondante de fronts les perestroikas qui interviennent génériquement sont montrés à la Figure 6; il s'agit des projections des mouvements de Reidemeister pour les nœuds relèvement des fronts dans l'espace de contact (voir par exemple [Ar3]) : *queue d'aronde* (Q), *pyramide* (P), *porte-monnaie* (B) et *auto-tangence sûre*[8]) (J^-).

Les auto-tangences dangereuses[9]) sont interdites car elles correspondent à un point d'auto-intersection de la courbe legendrienne dont le front est la projection. Pour un front plat toutes les auto-tangences sont dangereuses.

---

[8]) Au point d'auto-tangence la coorientation des deux branches est opposée.

[9]) Au point d'auto-tangence la coorientation des deux branches est la même.