1. Introduction

L'Enseignement Mathématique, t. 48 (2002), p. 147–168

L'ÉQUATION DE NAGELL–LJUNGGREN $\dfrac{x^n-1}{x-1} = y^q$

par Yann BUGEAUD et Maurice MIGNOTTE

1. INTRODUCTION

Le présent travail fait le point sur l'état actuel des connaissances concernant l'équation diophantienne

$$\frac{x^n-1}{x-1} = y^q\,, \quad \text{en entiers } x>1,\, y>1,\, n>2,\, q\geq 2\,, \tag{1}$$

associée au problème suivant: existe-t-il des puissances pures qui ne s'écrivent qu'avec le chiffre 1 dans une certaine base x ?

L'équation (1) possède les trois solutions

$$\frac{3^5-1}{3-1} = 11^2\,, \quad \frac{7^4-1}{7-1} = 20^2 \quad \text{et} \quad \frac{18^3-1}{18-1} = 7^3\,, \tag{$\mathcal{S}$}$$

et les travaux les plus récents conduisent à conjecturer que ce sont les seules.

CONJECTURE A. *L'équation* (1) *ne possède que les trois solutions* ($\mathcal{S}$).

Compte tenu de l'état actuel de nos connaissances, cette conjecture semble par trop ambitieuse, alors que la suivante paraît plus abordable.

CONJECTURE B. *L'équation* (1) *ne possède qu'un nombre fini de solutions.*

Dès à présent, il convient de souligner que des énoncés nettement plus faibles que la Conjecture B demeurent des problèmes ouverts. A titre d'exemple, on ne sait toujours pas démontrer la finitude du nombre de solutions de (1) lorsque $q=5$, … et cela même si l'on impose en plus à x d'être un cube !

Comme l'a montré Shorey dans son survol [46], la Conjecture B se déduit de la conjecture *abc*, que l'on peut énoncer comme suit.

Soit $\varepsilon > 0$ un réel et soient a, b et c trois entiers sans diviseur commun vérifiant $a+b = c$. Soit G le produit des diviseurs premiers (distincts) de abc. Alors, il existe un réel $\kappa > 0$, qui ne dépend que de ε, tel que $c \leq \kappa G^{1+\varepsilon}$.

Il suffit en effet de réécrire (1) sous la forme

$$(x-1)y^q + 1 = x^n,$$

et de choisir $\varepsilon = 1/8$, afin de déduire de la conjecture *abc* qu'il existe un réel $\kappa_1 > 0$ tel que

$$x^n < \kappa_1 \big(x(x-1)y\big)^{9/8} < \kappa_1 x^{9/4} y^{9/8}. \tag{2}$$

En outre, il découle facilement de (1) que $y^q < 2x^{n-1}$ et donc

$$y^{q(n-9/4)/(n-1)} < 2x^{n-9/4},$$

que l'on combine avec (2) afin d'obtenir

$$y^{q(n-9/4)/(n-1)} < 2\kappa_1 y^{9/8}. \tag{3}$$

Les cas $n = 3$ et $n = 4$ étant résolus (cf. ci-après), on déduit de (3) une majoration de y^q par une constante numérique absolue. Ainsi (1) ne possède qu'un nombre fini de solutions... si la conjecture *abc* est vraie.

Le présent survol est organisé comme suit. Dans la partie 2, nous présentons les premiers résultats relatifs à (1), qui sont dus à Nagell [36, 37] et à Ljunggren [31]. Plusieurs décennies se sont alors écoulées avant que Shorey et Tijdeman [47] n'obtiennent, comme conséquence des travaux d'Alan Baker [1, 2] sur la théorie des formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques, de nouveaux énoncés concernant (1), qui font l'objet de la troisième partie, tandis que la partie suivante constitue une brève introduction élémentaire à la théorie de Baker. Nous présentons ensuite les différentes étapes de la résolution complète de (1) lorsque x est égal à un carré, et montrons, dans la partie 6, comment interviennent les formes linéaires de logarithmes p-adiques dans la résolution de (1) lorsque x est fixé. En particulier, nous donnons les grandes lignes de la résolution de (1) quand x est une puissance de 10. Les parties 7, 8 et 9 complètent les résultats précédents et incluent en particulier une extension du théorème de Nagell et Ljunggren. La partie 10 est consacrée à une généralisation de l'équation (1), associée à la question : existe-t-il des puissances pures qui ne s'écrivent qu'avec le même chiffre a dans une certaine base x ? Dans la partie 11, nous examinons (1) lorsque x est négatif, avant de mentionner, dans la dernière partie, deux problèmes dans lesquels intervient l'équation (1).