5. CONCLUDING COMMENTS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

5. Concluding comments

In order to solve the local equivalence problem (i.e. when two metrics $\mathbf{g_1}, \mathbf{g_2}$ on a differentiable manifold M^n differ (locally) by a diffeomorphism), Riemann tried to compute $n\frac{n-1}{2}$ $\mathrm{Diff}(M^n)$-equivariant functions (i.e. $K(\mathbf{g_2})(p) = K(\mathbf{g_1})(f(p))$ for all $f \in \mathrm{Diff}(M^n)$, $p \in M^n$, $\mathbf{g_2} = f^*\mathbf{g_1}$). The Gaussian curvature K is such a function when $n = 2$. To do this, Riemann expanded the metric in normal coordinates and defined a map Q from $\mathcal{M}_n$, the space of Riemannian metrics on M^n, to $C^\infty(G_2(M^n))$, where $G_2(M^n)$ is the two-Grassmannian bundle over M^n. In other words, $Q(\mathbf{g})(\pi_p)$ is the sectional curvature of the 2-plane π_p at $p \in M^n$ with respect to the metric $\mathbf{g}$. Then he said that "... if the curvature is given in $n\frac{n-1}{2}$ surface directions at every point, then the metric relations of the manifold may be determined..." [Sp2, p. 144]. More precisely, Riemann took $n\frac{n-1}{2}$ independent sections π_{ij} of the bundle $G_2(M^n)$ and he defined the $n\frac{n-1}{2}$ functions by composing with Q (i.e. a map from $\mathcal{M}_n$ to $\{C^\infty(M^n)\}^{n\frac{n-1}{2}}$). Perhaps the expression of Q in coordinates, the two-dimensional flat case and the counting argument led Riemann to the wrong conclusion that Q can be recovered from evaluation in $n\frac{n-1}{2}$ independent 2-planes. It is hard to believe that he did not observe that this map is not actually a $\mathrm{Diff}(M^n)$-equivariant morphism, as follows from the fact that a generic diffeomorphism does not preserve the π_{ij} (i.e. $f^*\pi_{ij} \neq \pi_{ij}$) when $n > 2$.

Remark 5.1. A way of defining $n\frac{n-1}{2}$ $\mathrm{Diff}(M^n)$-equivariant functions from $\mathcal{M}_n$ to $C^\infty(M^n)$ such that:

(i) if $n = 2$ then the function is the Gauss curvature K;

(ii) if the $n\frac{n-1}{2}$ functions vanish identically then the metric $\mathbf{g}$ is flat;

is as follows. Regarding the curvature tensor R as a symmetric endomorphism of the second exterior product bundle $\bigwedge^2(M^n)$ one can take the characteristic polynomial $\chi_R(X)$ of R. Then the coefficients of $\chi_R(X)$ are the required $n\frac{n-1}{2}$ functions.

References

[B] Berger, M. Riemannian geometry during the second half of the twentieth century. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 100* (1998), 45–208.

[Di] Dieudonné, J. *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700–1900.* Vol. II. Hermann, 1978.