3.5 COHOMOLOGIE ET ACTIONS AFFINES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

pour la topologie de la convergence compacte, de sommes de fonctions de type positif associées à des représentations de $\mathcal{S}$. Avec ces définitions, une suite (généralisée) π_n de représentations unitaires de G converge vers π si et seulement si, pour toute sous-suite infinie $\pi_{n'}$ de π_n, π est faiblement contenue dans $\{\pi_{n'}\}$.

Pour les représentations irréductibles, la topologie ainsi induite sur $\widehat{G}$ n'est autre que la topologie quotient définie par l'application surjective

$$P(G) \longrightarrow \widehat{G}\colon \varphi \longmapsto \pi_\varphi$$

qui associe à un état pur la classe de la représentation GNS correspondante, $P(G)$ étant muni d'une quelconque des topologies mentionnées au §3.2. De plus, si π est une représentation irréductible et $\mathcal{S}$ est un sous-ensemble de $\widehat{G}$, alors π est faiblement contenue dans $\mathcal{S}$ si et seulement si π est dans l'adhérence de $\mathcal{S}$ pour la topologie de Fell.

3.5 Cohomologie et actions affines

Une *action par isométries affines* du groupe G sur un espace de Hilbert affine $\mathcal{H}$ est un morphisme α de G dans le groupe $\mathcal{I}so(\mathcal{H})$ des isométries affines de $\mathcal{H}$ tel que l'application

$$G \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}\colon (g, \xi) \longmapsto \alpha(g)\,\xi$$

soit continue. Par le choix d'une origine, on identifie un espace de Hilbert affine $\mathcal{H}$ à l'espace de Hilbert de ses translations. Si α est une action par isométries affines alors, pour tout g dans G et tout élément ξ de $\mathcal{H}$, on peut écrire

$$\alpha(g)\,\xi = \pi(g)\,\xi + b(g)$$

où $\pi(g)$ est un opérateur linéaire unitaire et $b(g) \in \mathcal{H}$. En imposant la continuité et la condition de morphisme pour α, on trouve d'une part que π est une représentation unitaire de G sur $\mathcal{H}$, appelée partie linéaire de α, et d'autre part que b est une application continue de G dans $\mathcal{H}$ qui satisfait la condition de cocycle

$$b(xy) = b(x) + \pi(x)\,b(y) \qquad \text{pour tous } x,\, y \in G\,.$$

Réciproquement, la donnée d'une représentation unitaire π de G sur $\mathcal{H}$ et d'une application continue b de G dans $\mathcal{H}$ vérifiant la condition de cocycle par rapport à π définit une action par isométries affines α de G sur $\mathcal{H}$, par la formule $\alpha(g)\,\xi = \pi(g)\,\xi + b(g)$.

Pour α, π et β comme ci-dessus, les conditions suivantes sont équivalentes (voir [HaVa], chapitre 4, lemme 3):

(i) α possède un point fixe;

(ii) α possède une orbite bornée;

(iii) toute orbite de α est bornée;

(iv) le cocycle b associé à α est borné;

(v) le cocycle b associé à α est un cobord.

3.6 Fonctions conditionnellement de type positif

Si $b\colon G \to \mathcal{H}$ est un cocycle continu pour la représentation π alors la fonction ψ définie par

$$\psi(g) = -\|b(g)\|^2 \qquad \text{pour tout } g \in G\,,$$

est *conditionnellement de type positif*: pour tous $g_1, \ldots, g_n \in G$, pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$, on a

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_j \lambda_i \, \psi(g_j^{-1} g_i) \geq 0\,.$$

La fonction ψ est normalisée ($\psi(e) = 0$) et symétrique ($\psi(g) = \psi(g^{-1})$). Réciproquement, à une telle fonction continue ψ, on associe le triple GNS $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi, b_\psi)$ où π_ψ est une représentation orthogonale de G dans l'espace de Hilbert réel $\mathcal{H}_\psi$ et b_ψ est un cocycle à coefficients dans $\mathcal{H}_\psi$ tel que, d'une part, le sous-espace engendré par $b_\psi(G)$ est dense dans $\mathcal{H}_\psi$, et d'autre part, pour tout $g \in G$, on a

$$\psi(g) = -\frac{1}{2}\|b_\psi(g)\|^2\,.$$

Pour rappel, si V désigne l'espace vectoriel des fonctions $f\colon G \to \mathbf{R}$ de support fini et telles que $\sum_{x \in G} f(x) = 0$ alors $\mathcal{H}_\psi$ est l'espace de Hilbert réel obtenu en séparant et complétant V pour la forme bilinéaire

$$\langle f \mid h \rangle = \sum_{x,y \in G} f(x)\, h(y)\, \psi(y^{-1}x)$$

et b_ψ applique $g \in G$ sur la classe dans $\mathcal{H}_\psi$ de la différence des fonctions caractéristique de g et e. La représentation π_ψ est déduite de l'action par multiplication à gauche de G sur V.

Soit π une représentation, b un 1-cocycle à coefficients dans π et $\psi = -\|b\|^2$ la fonction conditionnellement de type positif correspondante. On