

3.1 Représentations irréductibles et factorielles

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

3. REPRÉSENTATIONS, COHOMOLOGIE ET FONCTIONS (CONDITIONNELLEMENT) DE TYPE POSITIF

Les groupes sont supposés localement compacts séparables, les espaces de Hilbert considérés sont séparables et non nuls.

3.1 REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES ET FACTORIELLES

Pour un ensemble $S \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ d'opérateurs sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, on note $S' = \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid TS = ST \ \forall S \in S\}$ le *commutant* de S .

Soit π une représentation unitaire irréductible du groupe G sur l'espace $\mathcal{H}$. Grâce au lemme de Schur, l'irréductibilité de π signifie que le commutant $\pi(G)'$ de l'ensemble $\pi(G) = \{\pi(g) \mid g \in G\}$ est réduit aux opérateurs scalaires. Comme $\pi(G) \subset \mathcal{N}_\pi$, on a $\mathcal{N}'_\pi \subset \pi(G)'$. Ainsi, le centre $\mathcal{N}_\pi \cap \mathcal{N}'_\pi$ de l'algèbre de von Neumann $\mathcal{N}_\pi$ est lui-même réduit aux opérateurs scalaires sur $\mathcal{H}$. Ceci montre qu'une représentation irréductible π est factorielle.

3.2 FONCTIONS DE TYPE POSITIF

On appelle *fonction de type positif* sur le groupe localement compact G une fonction continue φ sur G à valeurs complexes telle que, pour tous $g_1, \dots, g_n \in G$, la matrice $(\varphi(g_j^{-1}g_i))_{1 \leq i, j \leq n}$ est hermitienne positive: pour tous $g_1, \dots, g_n \in G$ et pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{C}$, on a

$$\sum_{i, j=1}^n \lambda_i \overline{\lambda_j} \varphi(g_j^{-1}g_i) \geq 0.$$

A propos des fonctions de type positif, voir le paragraphe 32 de [HeRo]. Si φ est une fonction de type positif alors, pour tout $g \in G$, $\varphi(g^{-1}) = \overline{\varphi(g)}$ et $|\varphi(g)| \leq \varphi(e)$ où e désigne l'élément neutre du groupe G . On note $E_0(G)$ l'ensemble des fonctions de type positif φ sur G telle que $\varphi(e) \leq 1$. C'est un sous-ensemble convexe et borné de l'espace $L^\infty(G)$ des fonctions mesurables et essentiellement bornées sur G .

Sur $L^\infty(G)$, on considère les deux topologies suivantes: d'une part, la topologie $*$ -faible ou topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$ donnée par les semi-normes

$$p_f: L^\infty(G) \longrightarrow \mathbf{R}_+ : \varphi \longmapsto |\langle \varphi, f \rangle|$$

où $f \in L^1(G)$ et $\langle \varphi, f \rangle = \int_G \varphi(g)f(g)dg$; d'autre part, la topologie de la convergence uniforme sur toute partie compacte (ou plus simplement topologie de la convergence compacte) pour laquelle un système fondamental de voisinages de la fonction φ est donné par les ensembles