

## 2. L'INÉGALITÉ TAUTOLOGIQUE ET SES CONSÉQUENCES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

À remarquer que le quotient entre le coefficient de  $\delta_{N_0}$  et celui de  $\delta_{L_0}$  est égal au quotient entre la valeur propre de  $\mathcal{F}$  en  $(0, 0)$  le long de  $N_0$  et celle le long de  $L_0$ .

Si dans le même exemple on prend  $\lambda \in \mathbf{R}$  (et  $\lambda \notin \mathbf{Q}$  pour avoir des feuilles transcendantes) les feuilles de  $\mathcal{F}$  sont denses sur des hypersurfaces réelles et la dynamique de  $\mathcal{F}$  sur ces hypersurfaces ressemble à celle des feuilletages linéaires irrationnels des tores. Le courant  $\Phi$  sera alors uniformément distribué sur une de ces hypersurfaces.

Enfin, on peut construire de nouveaux exemples à partir des précédents par des transformations birationnelles. On aura ainsi des exemples où la courbe entière passe une infinité de fois à travers une singularité du feuilletage.

## 2. L'INÉGALITÉ TAUTOLOGIQUE ET SES CONSÉQUENCES

On continue avec les hypothèses et les notations de la section précédente :

- $X$  est une surface algébrique lisse ;
- $\mathcal{F}$  est un feuilletage holomorphe sur  $X$ , à singularités isolées ;
- $f: \mathbf{C} \rightarrow X$  est une courbe entière non dégénérée et tangente à  $\mathcal{F}$  ;
- $\Phi \in A^{1,1}(X)'$  est un courant positif fermé associé à  $f$ .

En plus, on supposera que les singularités de  $\mathcal{F}$  sont *réduites* au sens de [Se] (voir aussi [CS]) : au voisinage de chaque point singulier,  $\mathcal{F}$  est engendré par un champ de vecteurs dont la partie linéaire a pour valeurs propres  $1, \lambda$ , avec  $\lambda \notin \mathbf{Q}^+$ . Si  $\lambda \neq 0$  le point singulier est *simple*, sinon c'est un *nœud-col*. Ainsi chaque singularité réduite a une *multiplicité*  $d \geq 1$ , et  $d > 1$  si et seulement si la singularité est un nœud-col. Une *séparatrice* d'une singularité est une courbe analytique définie au voisinage de la singularité, tangente au feuilletage et passant par la singularité. On utilisera le fait qu'une singularité simple a exactement deux séparatrices (l'une transverse à l'autre), tandis qu'un nœud-col a une "séparatrice forte" tangente à l'espace propre de valeur propre 1 et, parfois, une "séparatrice faible" tangente à celui de valeur propre 0 [CS], [MR]. L'étude des feuilletages à singularités réduites est justifiée par le théorème de réduction des singularités de Seidenberg [Se] : tout feuilletage peut être transformé en un feuilletage à singularités réduites par une suite d'éclatements.

Du point de vue global, on peut associer à  $\mathcal{F}$  (et malgré ses singularités) un fibré tangent  $T_{\mathcal{F}}$  et un fibré normal  $N_{\mathcal{F}}$  : dans le langage des diviseurs,  $T_{\mathcal{F}}$  (resp.  $N_{\mathcal{F}}^*$ , dual de  $N_{\mathcal{F}}$ ) est représenté par la différence entre le diviseur

des zéros et le diviseur des pôles d'un champ de vecteurs méromorphe (resp. d'une 1-forme méromorphe) qui engendre  $\mathcal{F}$ . Nous renvoyons à [Br] pour les propriétés les plus basiques de ces fibrés (par exemple, leur comportement par éclatements).

Dans cette section nous allons esquisser, d'après [Mc], la preuve de l'inégalité suivante.

THÉORÈME 1 [Mc, §II.3].  $c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \geq 0$ .

En fait, nous nous contenterons de déduire cette inégalité de l'*inégalité tautologique raffinée* [Mc, II.3.3.2], dont la preuve est (presque) indépendante du feuilletage et sort un peu du cadre de ce texte.

Soit  $\mathbf{PTX}$  la projectivisation du fibré tangent de  $X$ ; c'est un  $\mathbf{CP}^1$ -fibré sur  $X$ , dont on notera  $\pi: \mathbf{PTX} \rightarrow X$  la projection. Sur  $\mathbf{PTX}$  on dispose du fibré tautologique  $\mathcal{O}_{\mathbf{PTX}}(-1)$ , qui a pour degré  $-1$  sur chaque fibre de  $\pi$  et qui jouera un rôle essentiel dans la suite. Rappelons la formule (tautologique) suivante: si  $C \subset X$  est une courbe algébrique lisse et si  $C' \subset \mathbf{PTX}$  est son relevé naturel, on a  $c_1(\mathcal{O}_{\mathbf{PTX}}(-1)) \cdot [C'] = \chi(C)$ .

Le feuilletage  $\mathcal{F}$  définit une section de  $\mathbf{PTX}$  au dessus de  $X \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$ , dont l'adhérence  $X' \subset \mathbf{PTX}$  est appelée *graphe* de  $\mathcal{F}$ . Si  $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ ,  $X'$  contient toute la fibre  $\pi^{-1}(p)$ . Si  $p$  est simple,  $X'$  est lisse au voisinage de  $\pi^{-1}(p)$  et la projection  $\pi: X' \rightarrow X$  s'identifie au voisinage de  $\pi^{-1}(p)$  avec l'éclatement de  $X$  en  $p$ . Si  $p$  est un nœud-col de multiplicité  $d$ ,  $X'$  a sur  $\pi^{-1}(p)$  un point singulier de type  $A_{d-1}$ . En effet, dans des coordonnées locales convenables le feuilletage  $\mathcal{F}$  au voisinage d'un nœud-col de multiplicité  $d$  est donné par l'équation (forme normale de Dulac, voir [MR] ou [CS])

$$[z(1 + \lambda w^{d-1}) + w F(z, w)] dw - w^d dz = 0.$$

où  $\lambda \in \mathbf{C}$  et  $F$  est une fonction holomorphe qui s'annule en  $(0,0)$  avec ses dérivés jusqu'à l'ordre  $d-1$ . Les coordonnées  $z, w$  induisent au voisinage de  $\pi^{-1}(p)$  des coordonnées naturelles  $z, w, \xi$ , où  $\xi = \frac{dw}{dz} \in \mathbf{CP}^1$ , et dans ces coordonnées le graphe  $X'$  est donné par l'équation

$$w^d = [z(1 + \lambda w^{d-1}) + w F(z, w)] \xi.$$

Un changement de variable  $z \mapsto z'$  ramène cette équation à la forme  $w^d = z' \xi$ , et on voit que si  $\xi \neq 0$  le point  $(0,0,\xi)$  est régulier, tandis que  $(0,0,0)$  est une singularité  $A_{d-1}$ . Donc le graphe  $X'$  peut avoir des singularités, mais cela ne nous gênera pas beaucoup, à la limite on pourra remplacer  $X'$  par sa résolution.

Pour tout  $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ , de multiplicité  $d_p$ , soit  $E_p = \pi^{-1}(p)$ , regardé comme courbe dans  $X'$ . On vérifie aisément que  $d_p E_p$  est un diviseur de Cartier, qui définit donc un fibré linéaire  $\mathcal{O}(d_p E_p)$  sur  $X'$ . Le degré de ce fibré sur  $E_p$  est égal à  $-1$  (car  $[d_p E_p]^2 = -d_p$  dans  $X'$ ). D'autre part,  $\mathcal{O}_{\mathbf{PTX}}(-1)$  a degré  $-1$  sur chaque  $E_p$  et coïncide (par tautologie) avec  $\pi^*(T_{\mathcal{F}})$  sur  $X' \setminus \bigcup_p E_p$ . On en déduit que

$$\mathcal{O}_{\mathbf{PTX}}(-1)|_{X'} = \pi^*(T_{\mathcal{F}}) \otimes \mathcal{O}\left(\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} d_p E_p\right).$$

On relève la courbe entière  $f$  sur  $\mathbf{PTX}$  à travers sa "dérivée"  $f' : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{PTX}$ . Bien sûr, l'image de  $f'$  est dans  $X'$  car  $f$  est tangente à  $\mathcal{F}$ . On peut associer à  $f'$  un courant positif fermé  $\Phi' \in A^{1,1}(X)'$ , comme dans la section précédente, et  $\pi_* \Phi' = \Phi$ . L'inégalité tautologique [Mc, I.0.2.5] exprime alors, intuitivement, la "non-négativité de la caractéristique d'Euler" de  $[\Phi]$  :

$$c_1(\mathcal{O}_{\mathbf{PTX}}(-1)) \cdot [\Phi'] \geq 0.$$

Voici l'idée de la preuve [Mc, I.1.1]. Soit  $Y$  la variété (de dimension 4) obtenue à partir de  $X \times X$  par éclatement de la diagonale  $\Delta \subset X \times X$ , et soit  $Z \subset Y$  le diviseur exceptionnel de l'éclatement: c'est un  $\mathbf{CP}^1$ -fibré sur  $\Delta \simeq X$ , canoniquement isomorphe à  $\mathbf{PTX}$ , et le fibré  $\mathcal{O}(Z) \in \text{Pic}(Y)$  restreint à  $Z$  coïncide avec le fibré tautologique:  $\mathcal{O}_{\mathbf{PTX}}(-1) \simeq \mathcal{O}(Z)|_Z$ . Soit  $\widehat{f} : \mathbf{C} \rightarrow X \times X$  définie par  $\widehat{f}(x) = (f(x), f(x))$ . Pour tout  $t \in \mathbf{C}$  proche de 1 on peut déformer  $\widehat{f}$  de la manière suivante: on pose  $\widehat{f}_t : \mathbf{C} \rightarrow X \times X$ ,  $\widehat{f}_t(x) = (f(tx), f(x))$ . À la différence de  $\widehat{f}$ , la courbe entière  $\widehat{f}_t$  n'a pas son image contenue dans la diagonale  $\Delta$ , on peut donc la relever sur  $Y$  et on la notera alors  $\widetilde{f}_t$ . On associe à  $\widetilde{f}_t$  un courant positif fermé  $\widetilde{\Phi}_t \in A^{1,1}(Y)'$  et le lemme 1 donne  $[\widetilde{\Phi}_t] \cdot [Z] \geq 0$ . Pour  $t \rightarrow 1$  la courbe  $\widetilde{f}_t$  "converge" vers la courbe  $f' : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{PTX} \simeq Z \subset Y$ , on a donc  $[\Phi'] \cdot [Z] \geq 0$ , qui est l'inégalité cherchée.

Après avoir défini

$$\nu(\Phi, p) = [\Phi'] \cdot [d_p E_p] \geq 0$$

on peut réécrire l'inégalité tautologique sous la forme

$$c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \geq - \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} \nu(\Phi, p).$$

Une singularité  $p$  est dite *petite* [Mc, II.3.3.1] si elle est simple et si ses deux séparatrices locales font partie de deux courbes algébriques (nécessairement invariantes) qui s'intersectent seulement en  $p$ . Puisque  $f$  est non dégénérée, son image n'est pas contenue dans ces courbes algébriques

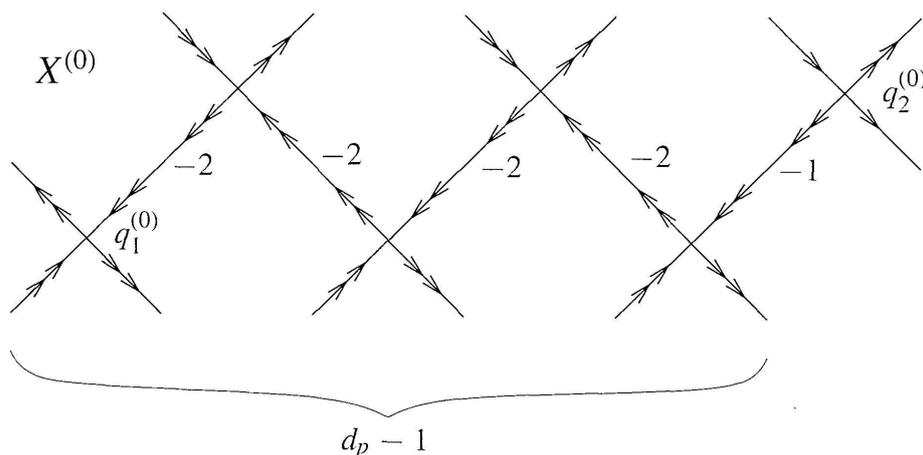
(mais, bien sûr,  $\text{Supp}(\Phi)$  peut contenir ces courbes) et donc  $f$  ne passe pas à travers la singularité. Cela permet d'améliorer l'inégalité tautologique, et on obtient ainsi l'*inégalité tautologique raffinée* [Mc, II.3.3.2]:

$$c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \geq - \sum_{p \in \text{SING}(\mathcal{F})} \nu(\Phi, p),$$

où  $\text{SING}(\mathcal{F}) \subset \text{Sing}(\mathcal{F})$  est l'ensemble des singularités qui ne sont pas petites. Comme justification partielle de cette amélioration, remarquons qu'elle serait évidente si on pouvait démontrer que  $\nu(\Phi, p) = 0$  si  $p$  est petite. Dans le cas où  $\Phi_{\text{alg}} = 0$  (i.e.  $\Phi = \Phi_{\text{diff}}$ ) cette annulation semble avoir lieu si le quotient des valeurs propres de  $\mathcal{F}$  en  $p$  n'est pas réel positif (ce qui serait déjà suffisant pour la suite): voir les commentaires après le lemme 6 de la prochaine section.

Passons maintenant à la preuve du théorème 1. Pour simplifier les notations, supposons que  $\mathcal{F}$  a une seule singularité,  $p$ . Soit  $X^{(0)}$  la surface obtenue par la construction suivante:

- si  $p$  est simple,  $X^{(0)}$  est l'éclaté de  $X$  en  $p$ ;
- si  $p$  est un nœud-col,  $X^{(0)}$  est le produit de  $d_p$  éclatements, chaque éclatement au seul point au dessus de  $p$  où le feuilletage relevé a un nœud-col:



Le diviseur exceptionnel de  $X^{(0)} \rightarrow X$  contient donc une courbe rationnelle d'autointersection  $-1$  et une chaîne de  $d_p - 1$  courbes rationnelles d'autointersection  $-2$ , la contraction desquelles produit la singularité  $A_{d_p - 1}$  du graphe  $X'$ . La surface  $X^{(0)}$  n'est donc rien d'autre que la résolution minimale de  $X'$ .

Comme d'habitude, on relève  $f$  sur  $X^{(0)}$  et on construit  $\Phi^{(0)} \in A^{1,1}(X^{(0)})'$ .

LEMME 3.  $[\Phi^{(0)}]^2 \leq [\Phi]^2 - \frac{1}{d_p} \nu(\Phi, p)^2$ .

*Preuve.* Considérons d'abord le courant intermédiaire  $\Phi' \in A^{1,1}(X')'$  : puisque  $\pi_* \Phi' = \Phi$  et  $[d_p E_p] \cdot [E_p] = -1$ , on a

$$[\Phi'] = \pi^*[\Phi] - \nu(\Phi, p) \cdot [E_p]$$

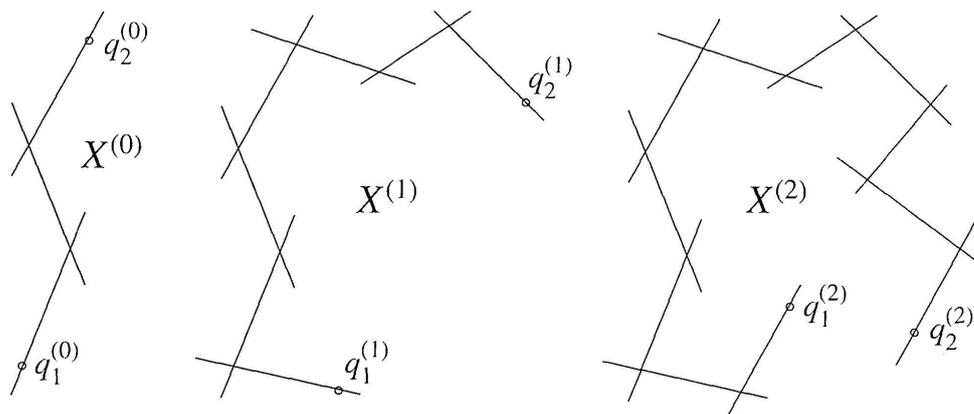
et donc

$$[\Phi']^2 = [\Phi]^2 - \frac{1}{d_p} \nu(\Phi, p)^2.$$

Si  $d_p = 1$  on a fini car  $X' = X^{(0)}$ . Si  $d_p > 1$  on passe de  $X'$  à  $X^{(0)}$  par une suite de  $d_p - 1$  éclatements, et puisque  $\Phi^{(0)}$  se projette sur  $\Phi'$  on obtient

$$[\Phi^{(0)}]^2 \leq [\Phi']^2. \quad \square$$

On peut itérer cette construction. Le feuilletage  $\mathcal{F}^{(0)}$  sur  $X^{(0)}$  possède deux singularités  $q_1^{(0)}$ ,  $q_2^{(0)}$  (avec  $d_{q_1^{(0)}} = 1$ ,  $d_{q_2^{(0)}} = d_p$ ) sur le diviseur exceptionnel de  $X^{(0)} \rightarrow X$  qui ne sont pas aux coins de ce diviseur et qui sont donc les seules susceptibles d'être non petites. Soit  $X^{(1)}$  obtenue par la construction précédente appliquée à ces deux singularités,  $X^{(2)}$  par la même construction appliquée aux deux seules singularités  $q_1^{(1)}$ ,  $q_2^{(1)}$  de  $\mathcal{F}^{(1)}$  susceptibles d'être non petites, *and so on*.



Le même argument que celui du lemme 3 donne alors l'inégalité suivante, avec notations évidentes et pour  $n \geq 1$  :

$$[\Phi^{(n)}]^2 \leq [\Phi^{(n-1)}]^2 - \left\{ \nu(\Phi^{(n-1)}, q_1^{(n-1)})^2 + \frac{1}{d_p} \nu(\Phi^{(n-1)}, q_2^{(n-1)})^2 \right\}$$

et par conséquent :

$$[\Phi^{(n)}]^2 \leq [\Phi]^2 - \left\{ \frac{1}{d_p} \nu(\Phi, p)^2 + \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \nu(\Phi^{(j)}, q_1^{(j)})^2 + \frac{1}{d_p} \nu(\Phi^{(j)}, q_2^{(j)})^2 \right\} \right\}.$$

L'observation fondamentale est alors la suivante: puisque  $[\Phi^{(n)}]^2 \geq 0$  pour tout  $n \geq 0$ , la somme  $\sum_{j=0}^{n-1} \dots$  qui apparaît ci-dessus est majorée par  $[\Phi]^2 - \frac{1}{d_p} \nu(\Phi, p)^2$  pour tout  $n \geq 0$ , et donc

$$\nu(\Phi^{(n)}, q_i^{(n)}) \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Le feuilletage  $\mathcal{F}^{(n)}$  sur  $X^{(n)}$  a (au plus) deux singularités non petites,  $q_1^{(n)}$  et  $q_2^{(n)}$ , et de l'inégalité tautologique raffinée on déduit

$$c_1(T_{\mathcal{F}^{(n)}}) \cdot [\Phi^{(n)}] \geq -\nu(\Phi^{(n)}, q_1^{(n)}) - \nu(\Phi^{(n)}, q_2^{(n)}).$$

Mais puisqu'on éclate toujours des singularités réduites on a  $T_{\mathcal{F}^{(n)}} = (\pi^{(n)})^*(T_{\mathcal{F}})$  (où  $\pi^{(n)}$  est la projection de  $X^{(n)}$  sur  $X$ ), et donc  $c_1(T_{\mathcal{F}^{(n)}}) \cdot [\Phi^{(n)}] = c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi]$ . On en déduit que

$$c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \geq 0.$$

C'est le théorème 1. Tout cela démontre (s'il en était besoin) que les éclatements ne servent pas seulement à résoudre des singularités...

### 3. LE DEGRÉ DU FIBRÉ NORMAL SUR LA COURBE ENTIÈRE

Avec les mêmes hypothèses et notations qu'auparavant, nous allons ici démontrer le résultat suivant, qui précise [Mc, II.1.4.1].

**THÉORÈME 2.**  $c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \geq 0$ .

On va d'abord se débarrasser de la composante algébrique  $\Phi_{alg} = \sum_{j=1}^N \lambda_j \delta_{C_j}$ . Puisque  $\mathcal{F}$  est à singularités réduites,  $C = \bigcup_{j=1}^N C_j$  est une courbe à croisements normaux: elle est  $\mathcal{F}$ -invariante, donc ses singularités sont contenues dans  $\text{Sing}(\mathcal{F})$  et au voisinage d'une de ses singularités elle coïncide avec l'union des séparatrices de  $\mathcal{F}$ . On a  $c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [C_j] = [C_j]^2 + Z(C_j, \mathcal{F})$ , où  $Z(C_j, \mathcal{F})$  est la multiplicité totale des singularités de  $\mathcal{F}$  le long de  $C_j$  [Br, lemme 3], et cette multiplicité est évidemment au moins égale à  $[C_j] \cdot \sum_{k \neq j} [C_k]$ . Donc  $c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [C_j] \geq [C_j] \cdot [C]$  et par conséquent

$$c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi_{alg}] \geq [\Phi_{alg}] \cdot [C].$$

D'autre part, la classe  $[\Phi]$  est numériquement effective et donc  $[\Phi_{alg}] \cdot [C] \geq -[\Phi_{diff}] \cdot [C]$ . On en déduit:

$$c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi] \geq c_1(N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}(-C)) \cdot [\Phi_{diff}].$$