§7. Le calcul du degré de C^0 -suffisance

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Preuve du lemme 6.1. On observe qu'il ne s'agit de rien d'autre que de construire la résolution de $x^v - y^u = 0$. Concrètement, en utilisant les calculs du début de l'appendice de [L-M-W2] on vérifie qu'en un sommet $\frac{a}{b}$ de l'approximation lente, la valuation de $\hat{k}$ sur la composante qui correspond à ce sommet vaut $av - bu$. Elle s'annule donc uniquement au sommet $\frac{a}{b} = \frac{u'}{v'}$. Les sommets qui sont à droite de $\frac{u'}{v'}$ satisfont l'inégalité $\frac{u'}{v'} < \frac{a}{b}$ tandis que ceux qui sont à gauche satisfont $\frac{a}{b} < \frac{u'}{v'}$. □

Utilisation du lemme 6.1. Revenons au paragraphe 2 et à la méthode proposée pour éliminer les indéterminations de $h = \frac{h_1}{h_2}$. Dans la résolution minimale de $h_1 h_2 = 0$ les éventuels points d'indétermination se trouvent au point d'intersection du diviseur Z des zéros avec le diviseur P des pôles. Localement, la situation est exactement celle du lemme. On obtient donc une résolution de h en insérant à la place du point d'indétermination le lieu exceptionnel donné par le lemme 6.1. Le point 2 du lemme dit exactement comment se fait le recollement. L'entier $-u$ est le coefficient dans P de la composante de P qui passe par le point d'indétermination tandis que v est le coefficient de la composante de Z qui passe par le point d'indétermination. Ceci complète ce que nous avons dit à la fin du paragraphe 3. Connaissant la topologie colorée de $h_1 h_2 = 0$ (par exemple via sa résolution minimale) on peut déterminer *effectivement* la topologie colorée de $h_1 h_2 h_{\text{gen}} = 0$. En effet, la valuation de $\hat{h}$ le long de chaque composante du lieu exceptionnel se calcule par les moyens habituels. Elle peut, par exemple, se ramener à un calcul de coefficients d'enlacement. Ensuite, chaque point d'indétermination est remplacé par le segment décrit par le lemme 6.1. Finalement, on obtient une résolution de $h_1 h_2 h_{\text{gen}} = 0$ en ajoutant, en plus des flèches colorées de $h_1 h_2 = 0$ des flèches d'une troisième couleur à chaque dicritique D_b en nombre égal au degré de l'application $\hat{h}|_{D_b} \to \mathbf{P}^1$.

§7. Le calcul du degré de C^0-suffisance

Soit $\pi : \Sigma \to U$ la résolution minimale de f. Soit D une composante irréductible de $\pi^{-1}(0)$ et soit γ une curvette de D. Rappelons qu'il s'agit d'un germe de courbe lisse, transverse à D en un point de D qui est lisse dans la transformée totale de $f = 0$ par π. Par définition, le *quotient d'Hironaka* q_D de D est le nombre rationnel $q_D = I(f, \gamma_*)/I(l, \gamma_*)$; dans cette formule l représente une droite transverse à $f = 0$ et γ_* est l'image de γ par π (voir le paragraphe 1).

La formule classique pour le calcul du nombre d'intersection implique immédiatement que l'on a $I(f, \gamma_*) = \mathrm{val}_D(f \circ \pi)$ et $I(l, \gamma_*) = \mathrm{val}_D(l \circ \pi)$. Par conséquent, on a aussi $q_D = \mathrm{val}_D(f \circ \pi)/\mathrm{val}_D(l \circ \pi)$.

Soit maintenant N un entier > 0. La composante D appartient au diviseur des pôles de la fonction méromorphe $h \circ \pi$, où $h = f(x,y)/l(x,y)^{N+1}$ si et seulement si $\mathrm{val}_D(f \circ \pi)/\mathrm{val}_D(l^{N+1} \circ \pi) < 1$. Autrement dit, si et seulement si $q_D < N + 1$.

LEMME 7.1. *Supposons qu'on a $q_D < N+1$ pour toutes les composantes de rupture de $\pi^{-1}(0)$. Alors on a $q_D \leq N + 1$ pour toutes les composantes de $\pi^{-1}(0)$. De plus, l'égalité ne peut avoir (éventuellement) lieu qu'en une composante D^0 de $\pi^{-1}(0)$ qui ne rencontre qu'une seule autre composante de $\pi^{-1}(0)$ et où passe exactement une composante de la transformée stricte de f par π. (Nous dirons que D^0* satisfait la condition *C.)*

Pour démontrer le lemme 7.1 nous aurons besoin d'un théorème de croissance. Pour énoncer ce dernier, il est plus confortable d'avoir recours à *l'arbre dual R de la résolution* π. Nous renvoyons au §3 de [L-M-W2] pour le vocabulaire qui s'y rattache. Remarquons aussi que la composante de $\pi^{-1}(0)$ obtenue par éclatement de l'origine de $\mathbf{C}^2$ (c'est-à-dire celle qui porte le numéro 1) est la composante où s'attache la transformée stricte de l par π. Le *théorème de croissance* s'énonce alors ainsi.

THÉORÈME 7.2. *Soit α une arête de R, d'extrémités D et D'. Supposons que D est plus proche de la composante numéro 1 que D'. Alors on a $q_D \leq q_{D'}$. De plus, l'inégalité est stricte si et seulement si en parcourant l'arête α en allant de D vers D', on se rapproche d'au moins une composante de la transformée stricte de $f = 0$ (autrement dit, si l'on se rapproche d'au moins une flèche).*

Pour une *preuve du théorème 7.2* voir le théorème 3.2 et son corollaire 3.3 de [L-M-W2].

Preuve du lemme 7.1. On remarque pour commencer qu'une composante de $\pi^{-1}(0)$ où passe au moins une composante de la transformée stricte de $f = 0$ n'est pas une composante de rupture si et seulement si elle satisfait la condition C.

S'il n'existe pas de telle composante, le maximum des q_D où D parcourt l'ensemble des composantes de $\pi^{-1}(0)$ est égal au maximum des q_D où D

parcourt seulement l'ensemble des sommets de rupture, à cause du théorème de croissance. Le lemme 7.1 est donc démontré dans ce cas.

Préoccupons-nous donc des composantes satisfaisant la condition C. L'archétype d'une telle situation est fourni par les singularités d'équation $y(y^q - x^p) = 0$ avec $p > q$ (et $\text{pgcd}(p, q) = 1$ si l'on veut). Il est amusant de constater que T. C. Kuo dans [Kuo1] p. 226 a également dû traiter avec un soin particulier ces mêmes singularités. En un sens, ce sont celles pour lesquelles la valeur donnée pour le degré de C^0-suffisance est la plus « limite ». La résolution minimale d'une telle singularité est donnée par le processus d'approximation lente donné plus haut. Il y a deux composantes de $\pi^{-1}(0)$ où passe (au moins) une composante de la transformée stricte. L'une D' correspond au nombre rationnel p/q. L'autre D'' correspond au nombre rationnel (en fait entier) $h^0 + 1$, où h^0 est la partie entière de p/q. C'est cette dernière composante qui satisfait la condition C.

On a $q_{D'} = p + \frac{p}{q}$ et $q_{D''} = p + h^0 + 1$. On voit qu'en prenant $N = p + \left[\frac{p}{q}\right]$ l'égalité est atteinte en D'', puisque $h^0 = \left[\frac{p}{q}\right]$.

Le cas général se démontre de façon analogue, en utilisant les formules données dans [L-M-W2]. L'égalité n'est pas nécessairement atteinte. □

THÉORÈME 7.3. *Supposons f à singularité isolée à l'origine de $\mathbf{C}^2$. Alors* Suff(f) *est égal au maximum des $[q_D]$ où D parcourt l'ensemble des composantes de rupture de $\pi^{-1}(0)$ (π est la résolution minimale de $f = 0$).*

Preuve du théorème 7.3. Posons $N = \max_D \{[q_D]\}$ où D parcourt l'ensemble des composantes de rupture de $\pi^{-1}(0)$. Dans un premier temps, il s'agit de montrer que $f - \lambda g = 0$ a la même topologie que f, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ et tout $g \in \mathfrak{m}^{N+1}$. La preuve est divisée en un certain nombre de cas.

1^er cas : $g(x, y) = l^M(x, y)$ où $l(x, y) = 0$ est l'équation d'une droite transverse à $f(x, y) = 0$ et où $M \geq N + 1$.

Ceci est le cas exemplaire, qui rend particulièrement visible pourquoi le degré de C^0-suffisance a la valeur annoncée. Voir aussi la remarque à la fin de la preuve du théorème 7.3.

Les calculs que nous venons de faire montrent que toutes les composantes de $\pi^{-1}(0)$ sont dans les pôles de $h \circ \pi$ où $h = (f : l^M)$ sauf éventuellement pour certaines composantes satisfaisant la condition C (situation que nous traiterons un peu plus loin).

En chaque point de contact de la transformée stricte de f, nous avons un point d'indétermination de la fonction méromorphe $h \circ \pi$ lorsque l'inégalité

est stricte. En ce point, nous appliquons le lemme 6.1 à $h\circ\pi$ en observant que $u = 1$ *car la singularité est isolée*. C'est ici que cette hypothèse intervient ! Selon la remarque qui suit la preuve du lemme 6.1 toutes les composantes dicritiques obtenues sont bonnes.

Supposons maintenant que l'on a une composante D^0 satisfaisant la condition C, que $q_{D_0} = N+1$ et que $M = N+1$. Dans ce cas, cette composante est dicritique pour $h\circ\pi$. Mais elle est bonne car la seule composante de $\pi^{-1}(0)$ qu'elle rencontre est dans les pôles (théorème de croissance !) et le degré de la restriction de $h \circ \pi$ à D^0 vaut 1, puisque D^0 ne rencontre qu'une seule composante de la transformée stricte de $f = 0$.

2^e cas : $g(x,y) \in \mathfrak{m}^M$ avec $M \geq N+1$ et la transformée stricte de g par π ne s'attache en aucun point de contact de la transformée stricte de $f = 0$.

La démonstration est la même que dans le 1^{er} cas. En effet, le calcul classique des multiplicités du diviseur $(g\circ\pi)$ montre qu'en chaque composante D de $\pi^{-1}(0)$ on a $\mathrm{val}_D(l^{N+1} \circ \pi) \leq \mathrm{val}_D(g \circ \pi)$.

3^e cas : $g(x,y) \in \mathfrak{m}^M$ avec $M \geq N+1$, mais la transformée stricte de $g = 0$ par π s'attache en (au moins) un point de contact de la transformée stricte de $f = 0$.

Soit Q un tel point. Il y a deux sous-cas 3a et 3b.

Cas 3a : La transformée stricte de g en Q ne contient pas ensemblistement la transformée stricte de $f = 0$. (Rappelons que π est la résolution minimale de f et donc la transformée stricte de $f = 0$ en Q est lisse et transverse au lieu exceptionnel.)

Éclatons le point Q. Nous obtenons une nouvelle composante D' et une nouvelle projection π' (qui remplace π). On a : $\mathrm{val}_{D'}(f\circ\pi') = \mathrm{val}_D(f\circ\pi)+1$ et $\mathrm{val}_{D'}(g\circ\pi') = \mathrm{val}_D(g\circ\pi)+m$ avec $m > 0$. En un nombre fini d'éclatements on sépare g de f et l'on se retrouve dans la situation du 2^{e} cas. Le fait que π' n'est pas minimale ne gêne pas.

Cas 3b : La transformée stricte de $g = 0$ en Q contient celle de $f = 0$. Autrement dit, on a une composante fixe.

Un calcul analogue au précédent montre que l'on peut commencer par faire des éclatements pour se ramener au cas où la transformée stricte de $g = 0$ est égale à celle de $f = 0$. En présence d'une composante fixe, il ne sert à rien de faire des éclatements. Choisissons plutôt des coordonnées locales en Q telles que $Y = 0$ soit l'équation du lieu exceptionnel et que $X = 0$ soit l'équation de la transformée stricte de f. Alors le pinceau local associé à $\frac{f}{g}\circ\pi$ s'écrit $\eta X - \lambda u X^m Y^n = 0$ où u est une unité en X et Y. Ici m est

un entier > 0. Le point important est que $n > 0$ même dans le cas où Q appartient à une composante D satisfaisant la condition C. La raison est que $\mathrm{val}_D(l^{N+1} \circ \pi) < \mathrm{val}_D(g \circ \pi)$ car g passe par Q tandis que l s'attache en la composante numéro 1. Ceci découle du calcul usuel des multiplicités pour les résolutions des singularités de courbes planes. On voit alors que le pinceau local en Q n'a que ∞ comme valeur spéciale. Ceci achève la preuve de la première partie du théorème 7.3.

Dans un deuxième temps, nous allons maintenant montrer que, si M est un entier > 0 strictement inférieur à $\max_D \{[q_D]\}$ où D parcourt l'ensemble des composantes de rupture de $\pi^{-1}(0)$, alors le jet $j^{(M)}(f)$ n'est pas topologiquement suffisant.

Manifestement, il suffit de montrer que le pinceau $f(x,y) - \lambda l(x,y)^{M+1} = 0$ n'est pas équisingulier pour $\lambda \in \mathbf{C}$. (Comme précédemment $l(x,y) = 0$ est l'équation d'une droite transverse à $f(x,y) = 0$.)

Par hypothèse, il existe au moins une composante de rupture D' telle que $M+1 \leq q_{D'}$. Par le théorème de croissance, on peut supposer que D' contient des points de contact de la transformée stricte de $f = 0$.

Supposons pour commencer que l'inégalité est stricte. Comme l est transverse à $f = 0$, la résolution minimale de $f = 0$ est aussi celle de $lf = 0$. La transformée stricte l' de l est dans le diviseur P des pôles de $(f : l^{M+1})$ tandis que, par hypothèse, la composante D' est dans le diviseur Z des zéros de h. Notons Γ la géodésique de l'arbre de la résolution minimale de f qui relie le sommet numéro 1 à D'. La démonstration de la proposition 2.1 indique que Γ contient des composantes dicritiques ou des points d'indétermination. (Les deux possibilités peuvent coexister.) En ce qui concerne les points d'indétermination, appliquons le procédé décrit dans le lemme 6.1. Nous obtenons une nouvelle géodésique Γ' qui relie le sommet numéro 1 à D'. Soit D'' la composante dicritique dans Γ' qui est la plus proche de D'. Alors, l'ensemble des valeurs spéciales S'' associé à D'' contient au moins une valeur distincte de ∞. En effet, par construction, D'' rencontre une composante D telle que $D'' \cap D = \{Q\}$ et $\hat{h}(Q) \neq \infty$.

S'il y a égalité $M + 1 = q_{D'}$ alors la composante D' est dicritique. Si D' rencontre des composantes de $\pi^{-1}(0)$ qui ne sont pas dans les pôles, on considère la valeur λ' prise par $\hat{h}$ au point d'intersection d'une de ces composantes avec D'. Par construction $\lambda' \neq \infty$ et l'on conclut comme ci-dessus. Si D' ne rencontre que des composantes qui sont dans les pôles, alors D' (qui est une composante de rupture) contient au moins 2 points de contact de la transformée stricte de $f = 0$.

Par conséquent, le degré $\hat{h}|_{D'} \to \mathbf{P}^1$ est au moins égal à 2. La restriction de $\hat{h}$ à D' aura au moins une valeur critique distincte de ∞ (grâce au théorème de Hurwitz). Par conséquent $S_{D'}$ contient au moins une valeur distincte de ∞ et l'on conclut comme précédemment. Fin de la preuve du théorème 7.3.

REMARQUES FINALES.

1. La preuve du théorème 7.3 montre clairement que si f n'est pas à singularité isolée à l'origine, aucun jet $j^{(r)}(f)$ n'est suffisant (pour r fini). En effet, choisissons un point de contact de la transformée stricte de $f = 0$ avec $\pi^{-1}(0)$ où cette transformée stricte n'est pas réduite.

Appliquons le lemme 6.1 pour $g = l(x, y)^N$ avec N grand et $h = \frac{f}{g}$. On voit que l'on a $u > 1$ car f n'est pas réduite. La remarque qui suit le lemme 6.1 indique que la composante dicritique créée par l'utilisation du lemme 6.1 n'est pas bonne. Il est facile de déterminer grâce au lemme 6.1 quel est le membre générique du pinceau ainsi créé (il dépend de l'entier N). Bien sûr, ce membre générique est à singularité isolée. Ceci donne un autre point de vue sur les résultats de H. Maugendre dans sa thèse. (Voir [Mau].)

2. Soit $l(x, y) = 0$ l'équation d'une droite transverse à $f(x, y) = 0$. La preuve du théorème 7.3 montre que le jet $j^{(r)}(f)$ est topologiquement suffisant si et seulement si $f - \lambda l^{r+1}$ est topologiquement équivalent à f pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$. Comparer avec B. Teissier dans [Tei2] p. 280.

§8. UN PETIT HISTORIQUE DE LA C^0-SUFFISANCE

Le concept de C^0-suffisance apparaît dans l'article de R. Thom au colloque de Bombay. (Voir [Thom].) Le rôle de l'inégalité de Lojasiewicz y est mis en évidence.

Au cours des années 1970-80, plusieurs auteurs (voir, entre autres, [Kuo2], [Bo-Lo], [Ch-Lu]) ont établi que $\mathrm{Suff}(f)$ est donné par l'inégalité de Lojasiewicz de la façon suivante. On considère les exposants $\theta > 0$ tels qu'il existe un voisinage U de l'origine et une constante $C > 0$ tels que l'on ait: $|\mathrm{grad}\ f(z)| \geq C|z|^\theta$ pour tout $z \in U$. La borne inférieure des θ ayant cette propriété est *l'exposant de Lojasiewicz* $\mathrm{Loja}(f)$. Le résultat obtenu par plusieurs auteurs est que $\mathrm{Suff}(f) = [\mathrm{Loja}(f)] + 1$, où $[x]$ désigne la partie entière de x.

Dans [Kuo-Lu] T.C. Kuo et Y.C. Lu ont donné une façon explicite de calculer l'exposant de Lojasiewicz pour les germes de courbes planes, en utilisant les développements de Puiseux des branches de $f = 0$.