§5. Bonnes composantes dicritiques

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

ne peut pas être isomorphe à l'entrelacs d'un germe générique. Mais en fait l'entrelacs réduit d'un germe non réduit ne peut pas non plus être isomorphe à l'entrelacs d'un germe générique. En effet, s'il existe une composante D_a de E telle que la restriction de $\hat{h}$ à D_a est constante, la démonstration donnée s'applique sans changement. Sinon, comme au moins une branche du germe $h(z) = w$ est non réduite, la preuve du lemme 4.6 montre que ce germe a un nombre de branches strictement inférieur au nombre de branches d'un germe générique.

REMARQUE SUR LE THÉORÈME 4.5. On a vu que P est l'éclatement de l'idéal (h_1, h_2) engendré par h_1 et h_2. On sait alors que la composition $P \circ n$ de P avec la normalisation $n\colon \overline{\Sigma} \to \Sigma$ est aussi l'éclatement d'un idéal qui n'est autre que la clôture intégrale I de l'idéal (h_1, h_2) dans l'anneau analytique local régulier de dimension deux $\mathcal{O}_{U,o}$. Au sens de Zariski-Samuel (voir l'appendice 5 de [Z-S]) l'idéal I est un idéal complet. Par définition (voir [Sp]) les singularités de $\overline{\Sigma}$ sont des singularités sandwich. Notre construction donne à partir de la résolution de $h_1 h_2$ la résolution minimale de ces singularités sandwich. Inversément, si $I \subset \mathcal{O}_{U,o}$ est un idéal complet et si h_1 et h_2 sont des éléments superficiels de I (voir [Z-S] vol. 2, p. 285) tels que la multiplicité de l'idéal (h_1, h_2) est égale à celle de I, un théorème de Rees montre que I est la clôture intégrale de (h_1, h_2). De ceci résulte que toutes les singularités sandwich sont obtenues après normalisation d'un système linéaire de germes de courbes planes.

§5. BONNES COMPOSANTES DICRITIQUES

Comme indiqué dans l'introduction, notre point de vue sur la C^0-suffisance est le suivant. Le germe f étant donné, nous cherchons une condition sur la multiplicité de g pour que les germes $f - \lambda g = 0$ aient tous la même topologie, quel que soit $\lambda \in \mathbf{C}$. Considérant le pinceau $\eta f - \lambda g = 0$ nous cherchons donc à savoir quand son ouvert d'équisingularité Ω contient $\mathbf{C} = \mathbf{P}^1 \setminus \{\infty\}$.

REMARQUE. Il découle facilement de la description des valeurs spéciales donnée au paragraphe 4 que l'ouvert d'équisingularité d'un pinceau est égal à $\mathbf{P}^1$ tout entier si et seulement si :

1. le pinceau est résolu en un seul éclatement;
2. le degré de $\hat{h}|_D \to \mathbf{P}^1$ est égal à 1, où D est le dicritique créé par l'éclatement.

Ces deux conditions reviennent à dire que l'on a affaire à un pinceau de courbes lisses à tangentes distinctes.

En dehors de ce cas banal, tous les pinceaux ont un ouvert d'équisingularité strictement contenu dans $\mathbf{P}^1$. Nous nous intéressons donc au cas où l'ouvert Ω est « le plus gros possible », c'est-à-dire consiste en $\mathbf{P}^1$ privé d'un point (qui est en l'occurrence le point $\infty \in \mathbf{P}^1$). On pourrait nommer de tels pinceaux « presque équisinguliers ».

Pour reconnaître ces pinceaux, revenons au germe de fonction méromorphe $h \colon U \dashrightarrow \mathbf{P}^1$ défini au début du paragraphe 2. Voici une façon un peu différente de définir les valeurs spéciales (voir le début du paragraphe 3). Considérons la résolution minimale de h et soit D_b une de ses composantes dicritiques. Associons à D_b le sous-ensemble fini $S_b \subset \mathbf{P}^1$ formé :

1. des valeurs critiques de la restriction $\hat{h}|_{D_b}$;

2. des valeurs $\hat{h}(Q)$ pour chaque point d'intersection Q de D_b avec une autre composante du lieu exceptionnel.

On démontre facilement l'affirmation suivante.

AFFIRMATION. *L'ensemble des valeurs spéciales de h est égal à la réunion $\bigcup_b S_b$ où b parcourt l'ensemble des composantes dicritiques $\{D_b\}$ de la résolution minimale de la fonction h.*

DÉFINITION. Nous dirons que la composante dicritique D_b est *bonne* si $S_b = \{\infty\}$.

REMARQUE. Nous choisissons l'adjectif « bon » par commodité de langage, mais aussi parce que les composantes bonnes sont étroitement liées aux polynômes bons à l'infini (« good ») de W. Neumann et L. Rudolph. Voir [Neu] et [L-W].

La démonstration du lemme suivant découle facilement du théorème 4.1.

LEMME 5.1. *La composante dicritique D_b est bonne si et seulement si :*

1. *le degré de $\hat{h}|_{D_b} \to \mathbf{P}^1$ vaut 1 ;*

2. *la composante D_b ne rencontre qu'une seule autre composante D du lieu exceptionnel et l'on a $\hat{h}(Q) = \infty$ où $Q = D_b \cap D$.*

Dans le paragraphe 7, nous déterminons le degré de C^0-suffisance d'un germe f en cherchant à quelle condition sur la multiplicité de g les composantes dicritiques de $h = \frac{f}{g}$ sont toutes bonnes.

§6. ÉTUDE D'UN CAS PARTICULIER

Considérons le germe de fonction méromorphe donné par $k(x,y) = \frac{x^v}{y^u}$ où u et v sont deux entiers supérieurs ou égaux à 1. La résolution minimale de $k(x,y)$ est donnée par la processus suivant. On écrit $u = ru'$ et $v = rv'$ avec $\mathrm{pgcd}(u',v') = 1$. On construit l'approximation lente de $\frac{u'}{v'}$. Pour plus de détails sur ce procédé, voir [L-M-W2] début de l'appendice. Le point de départ est fourni par le développement en fraction continue de $\frac{u'}{v'}$ donné par :

$$u'/v' = h^0 + \cfrac{1}{h^1 + \cfrac{1}{h^2 + \cdots + \cfrac{1}{h^s}}}$$

où l'on a $0 \leq h^0$, $1 \leq h^i$ pour $1 \leq i \leq s-1$, $2 \leq h^s$. Posons $m = \sum_{i=0}^{s} h^i$.

LEMME 6.1.

1. *Il y a exactement une composante dicritique et c'est la composante obtenue après m éclatements. Elle correspond précisément au nombre rationnel $\frac{u'}{v'}$ de l'approximation lente.*

2. *La transformée stricte de $y^u = 0$ est une curvette de la composante qui correspond au sommet le plus à gauche. La transformée stricte de $x^v = 0$ est une curvette du sommet le plus à droite.*

3. *Le degré de la restriction de $\hat{k}$ à la composante dicritique est égal à* $r = \mathrm{pgcd}(u,v)$.

4. *Les sommets qui sont à gauche de la composante dicritique ont valuation < 0 tandis que ceux qui sont à droite ont valuation > 0.*

Conséquence du lemme 6.1 (importante pour la suite). La composante dicritique est bonne si et seulement si $u = 1$. En effet $u = 1$ est équivalent à :

1. $r = 1$, i.e. le degré de la restriction de $\hat{k}$ au dicritique est égal à 1.

2. Les composantes du lieu exceptionnel qui rencontrent le dicritique ont valuation < 0 (en fait il n'y a qu'une composante du lieu exceptionnel qui rencontre le dicritique).