

4. Real Cubic Forms which are not Cup Forms of Projective Algebraic Manifolds

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

3.12. $(3A_2)$. Let $X = (\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1)^\wedge(p)$ be the blow up of $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$ in the point p . The cup form of X is

$$x_4^3 + 6x_1x_2x_3.$$

3.13. $(2A_1A_2)$. Consider the curve $C = Z(s) \subset \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$ where $s \in H^0(\mathcal{O}(1, 1, 0) \oplus \mathcal{O}(0, 0, 1))$ is a general section, and let X be the blow up of $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$ along C . The cup form

$$6x_1x_2x_3 - 3x_1x_4^2 - 3x_2x_4^2 - 2x_4^3$$

of X defines a cubic surface with A_1 -singularities in $[1 : 0 : 0 : 0]$ and $[0 : 1 : 0 : 0]$ and an A_2 -singularity in $[0 : 0 : 1 : 0]$.

3.14. (D_4'') . Let $X := \widehat{\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2}(p_1, p_2)$ be the blow up of $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2$ in the points p_1 and p_2 . Its cup form is described by the polynomial

$$3x_1x_2^2 + x_3^3 + x_4^3.$$

This polynomial is the equation of a cubic surface with a D_4 -singularity in $[1 : 0 : 0 : 0]$.

3.15. *A Non-Singular Quadric with a Transversal Plane.* Manifolds with such cup forms may be obtained as suitable \mathbf{P}_1 -bundles over surfaces. Indeed, let Y be a smooth surface with $b_2 = 3$. W. r. t. a suitable basis (h_1, h_2, h_3) of $H^2(Y, \mathbf{Z})$, its cup form is given by $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Now, let E be a vector bundle of rank 2 such that $c_1^2(E) - c_2(E) \neq 0$. Let $X := \mathbf{P}(E) \xrightarrow{\pi} Y$ and choose $(\pi^*h_1, \pi^*h_2, \pi^*h_3, c_1(\mathcal{O}_X(1)))$ as a basis of $H^2(X, \mathbf{Z})$. Then, by [OV], Prop. 15, the cup form of X is given by

$$(c_1^2(E) - c_2(E))x_4^3 + x_4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

3.16. *A Quadric Cone with a Transversal Plane.* Let Y be a simply connected surface with $b_2 = 3$ and torsion free homology. The cup form of Y is given by a quadratic polynomial $q(x_1, x_2, x_3)$ defining a smooth conic. Thus, the cup form of $Y \times \mathbf{P}_1$ is given by

$$x_4 q(x_1, x_2, x_3).$$

4. REAL CUBIC FORMS WHICH ARE NOT CUP FORMS OF PROJECTIVE ALGEBRAIC MANIFOLDS

In the paper [Sch2], the author investigated the restrictions on the real cubic forms of projective manifolds imposed by the so called Hodge-Riemann bilinear relations:

THEOREM 8. *Let X be a Kählerian threefold and $h \in H^2(X, \mathbf{R})$ be a Kähler class. Then the map*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle: \quad H^2(X, \mathbf{R}) \times H^2(X, \mathbf{R}) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (a, b) &\longmapsto a \cup b \cup h \end{aligned}$$

is a non-degenerate, symmetric bilinear form of signature $(2h^{2,0} + 1, h^{1,1} - 1)$.

One can restate this theorem in such a form as to obtain – at least in theory – some explicit inequalities in the coefficients of cubic polynomials which are satisfied by the cup forms of Kählerian and hence projective algebraic threefolds. The main result of [Sch2] is

THEOREM 9. *For $n \geq 4$, the polynomial*

$$x_0 \left(\frac{4-n}{4} x_0^2 - 3x_1^2 - \dots - 3x_n^2 \right)$$

cannot occur as the (real) cup form of a projective algebraic threefold with $b_1 = 0$ and $b_3 = 0$.

As a corollary, one obtains the following generalization of a result of Campana and Peternell [CP]:

THEOREM 10. *For $n \geq 4$, twistor spaces over $\#_{i=1}^n \mathbf{P}_2$ are not homeomorphic to projective algebraic threefolds.*

REFERENCES

[AGV] ARNOLD, V.I., S.M. GUSEIN-ZADE and A.N. VARCHENKO. *Singularities of Differentiable Maps, Vol. I.* Birkhäuser, 1985.

[BC] BARDELLI, F. and A. DEL CENTINA. Nodal cubic surfaces and the rationality of the moduli space of curves of genus two. *Math. Ann.* 270 (1985), 599–602.

[Be] BEKLEMISHEV, N.D. Invariants of cubic forms in four variables. *Vestnik Mosk. Univ. Mat.* 37 (1982), 42–9.

[BW] BRUCE, J.W. and C.T.C. WALL. On the classification of cubic surfaces. *J. London Math. Soc. (2)* 19 (1979), 245–56.

[CP] CAMPANA, F. and T. PETERNELL. Rigidity of Fano 3-folds. *Comm. Anal. Geom.* 2 (1994), 173–201.

[GH] GRIFFITHS, Ph. and J. HARRIS. *Principles of Algebraic Geometry.* Wiley Interscience, 1978.