5. GÉNÉRALISATIONS ET EXEMPLES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **42 (1996)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

REMARQUES

1) Il découle du corollaire 4.2 que si f est totalement additive, l'écart entre $f(n)$ et $\hat{f}(n)$ est plus petit qu'entre $f(n)$ et $\bar{f}(n)$, alors que si f est fortement additive, c'est le contraire qui se produit.

2) A partir des définitions de $\bar{\Delta} f$, $\hat{\Delta} f$, $\tilde{\Delta} f$ et des égalités (4.1), (4.2) et (4.3), il est intéressant de souligner que, pour toute fonction arithmétique f, on a les inégalités $\overline{f^2} \geqslant \bar{f}^2$, $\tilde{f^2} \geqslant \tilde{f}^2$ et $\hat{f^2} \geqslant \hat{f}^2$, et qu'en particulier sur les entiers libres de carrés, on a $\bar{\Delta} f(n) = \hat{\Delta} f(n) = \tilde{\Delta} f(n)$.

5. GÉNÉRALISATIONS ET EXEMPLES

Les fonctions $\bar{f}$, $\hat{f}$ et $\tilde{f}$ définies par les égalités (1.3), représentent essentiellement trois moyennes de f évaluées respectivement sur les diviseurs, les diviseurs libres de carrés et les diviseurs unitaires d'un entier. Nous allons maintenant montrer comment certaines propriétés satisfaites par ces trois fonctions demeurent valables lorsque les moyennes sont évaluées sur d'autres classes de diviseurs d'un entier.

Etant donné un entier naturel n, on désigne par D_n l'ensemble des diviseurs (positifs) de n. Soit alors A une famille d'ensembles A_n tels que $A_n \subset D_n$ pour chaque $n \in \mathbf{N}$. Par exemple, en désignant par I_n l'ensemble des diviseurs impairs de l'entier positif n, la famille A constituée de tous les ensembles I_n est un exemple typique.

Etant donné une famille $A := \{A_n : n \in \mathbf{N}\}$, alors à chaque ensemble A_n, on associe son cardinal soit la fonction $\tau_A(n)$ définie par

$$\tau_A(n) := \sum_{\substack{d \mid n \\ d \in A_n}} 1$$

qu'on peut aussi écrire $(1 *_A 1)(n)$, avec $*_A$ pour signifier que seuls les diviseurs d de n qui appartiennent à A_n sont pris en considération. Nous nous intéressons ici aux familles pour lesquelles les ensembles A_n possèdent une fonction τ_A multiplicative et jamais nulle.

EXEMPLES. Soit $k \in \mathbf{N}$ et $2 \leqslant y \in \mathbf{R}$. Définissons de plus $P(1) = 1$ et $P(n) = \max\{p : p \mid n\}$. Alors les ensembles

$$\begin{aligned} A_n(k) &= \{d : d \mid n \text{ et } d = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}, 0 \leqslant \alpha_i < k\} \\ &= \{d : d \mid n \text{ et } d \text{ est } k\text{-libre}\}, k \geqslant 2, \\ B_n(y) &= \{d : d \mid n \text{ et } P(d) \leqslant y\}, \\ E_n(k) &= \left\{d : d^k \mid n \text{ et } \left(d^k, \frac{n}{d^k}\right) = 1\right\} \end{aligned}$$

donnent lieu à trois familles A, B et E de sous-ensembles de D_n pour lesquels les fonctions τ_A, τ_B et τ_E sont multiplicatives et jamais nulles.

Etant donné une fonction arithmétique f et une famille A, on pose maintenant

$$f_A(n) = \frac{1}{\tau_A(n)} \sum_{\substack{d \mid n \\ d \in A_n}} f(d) ,$$

ce qui revient à écrire

$$f_A := \frac{f *_A 1}{1 *_A 1} . \tag{5.1}$$

Aux cas particuliers $*_A = *$, $*_A = *_l$ (où $*_l$ est la restriction de $*$ aux diviseurs libres de carrés) et $*_A = *_u$, correspondent bien sûr les fonctions $\bar{f}$, $\hat{f}$ et $\tilde{f}$.

On a mentionné à la section 2 qu'en général $\bar{f}(n) \neq f(n)$. Il en est de même pour sa généralisation f_A en ce sens que l'on peut facilement démontrer que

$$f_A(n) = f(n) \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 1 \Leftrightarrow f \equiv c \text{ pour une certaine constante } c;$$

auquel cas, si f est multiplicative on a $c = 1$, alors que si f est additive, on a $c = 0$.

Le prochain résultat généralise le théorème 2.2.

THÉORÈME 5.1. *Soit* $f \in \mathbf{F}$ *et* A *une famille d'ensembles* $A_n \subset D_n$ *et supposons que* $\tau_A \in \mathscr{M}$. *Alors la fonction* f_A *est multiplicative si* $f \in \mathscr{M}$ *et elle est additive si* $f \in \mathscr{A}$.

REMARQUES. Il est également possible de considérer les familles d'ensembles A_n pour lesquelles $\tau_A(n)$ peut être nulle pour certains entiers n; pour ce faire, il suffit de remplacer (5.1) par

$$f_A(n) = \begin{cases} \dfrac{f *_A 1}{1 *_A 1}(n) & \text{si } (1 *_A 1)(n) \neq 0, \\ 0 & \text{autrement} . \end{cases} \tag{5.2}$$

Dans ce cas, seule la première partie du théorème 5.1 reste valide i.e. si $f \in \mathscr{M}$ alors la fonction f_A définie par l'égalité (5.2) est multiplicative. En effet, soit $(m, n) = 1$ et supposons que $f \in \mathscr{M}$. Si $\tau_A(n) \neq 0$ et $\tau_A(m) \neq 0$ alors $f_A(mn) = f_A(m) f_A(n)$; si par contre $\tau_A(n)$ ou $\tau_A(m)$ est nulle alors, puisque $\tau_A \in \mathcal{M}$, $\tau_A(mn) = 0$, i.e. $f_A(mn) = 0 = f_A(m) f_A(n)$ car au moins une des quantités $f_A(m)$ et $f_A(n)$ est nulle. Donc si $f \in \mathcal{M}$ alors $f_A \in \mathcal{M}$.

Pour montrer que la fonction f_A de la relation (5.2) ne préserve pas l'additivité sur certains ensembles de diviseurs, il suffit de considérer $A_n = \{d : d \mid n, (d, 2) = 1 \text{ et } (n/d, 2) = 1\}$ et $f \in \mathcal{A}$ avec $f(n) > 0$ pour chaque $n > 1$. On a alors $\tau_A(3) = 2$, $\tau_A(4) = 0$ et $\tau_A(12) = 0$. Il est clair que $f_A(12) = f_A(4) = 0$ alors que $f_A(3) = \frac{1}{2} f(3) > 0$. Ainsi $f_A(12) \neq f_A(4) + f_A(3)$.

La définition de la fonction f_A à partir de la restriction du produit de Dirichlet à certains diviseurs est basée sur la notion de *A-convolution* introduite par Narkiewicz [6] (voir également Subbarao [8] et le chapitre 4 du livre de McCarthy [5]). Soit h et $g \in \mathbf{F}$ alors pour une famille A de sous-ensembles A_n de D_n, on définit la A-convolution de h et g par

$$(h *_A g)(n) := \sum_{\substack{d \mid n \\ d \in A_n}} h(d) g(n/d),$$

qui de façon générale n'est pas commutative. C'est-à-dire qu'il arrive qu'on ait, pour une certaine famille d'ensembles $A_n \subset D_n$,

$$\sum_{\substack{d \mid n \\ d \in A_n}} h(d) g(n/d) \neq \sum_{\substack{d \mid n \\ d \in A_n}} h(n/d) g(d).$$

EXEMPLES. On a ainsi les cas particuliers suivants:

(i) Soit $*_A = *$ alors $f_A(n) = \bar{f}(n) = \dfrac{1}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} f(d)$.

(ii) Soit $*_A = *_l$ alors $f_A(n) = \hat{f}(n) = \dfrac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{d \mid n} \mu^2(d) f(d)$.

(iii) Soit $*_A = *_u$ alors $f_A(n) = \tilde{f}(n) = \dfrac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d \mid n \\ (d, n/d) = 1}} f(d)$.

(iv) Soit $(a, b)^*$ le plus grand commun diviseur unitaire de a et b et

$$\tau_A(n) = \sum_{\substack{d \mid n \\ (d, n/d)^* = 1}} 1 = \tau(n) \prod_{\substack{p^\alpha \| n \\ \alpha \text{ pair}}} \frac{\alpha}{1 + \alpha}, \text{ alors}$$

$$f_A(n) = \frac{1}{\tau_A(n)} \sum_{\substack{d \mid n \\ (d, n/d)^* = 1}} f(d).$$

(v) On pose $\omega_k(n) := \sum_{\substack{p\mid n \\ (p,k)=1}} 1$. Soit $\tau_A(n) = \sum_{\substack{d\mid n;\,(d,k)=1 \\ (d,n/d)=1}} 1 = 2^{\omega_k(n)}$ alors

$$f_A(n) = \frac{1}{2^{\omega_k(n)}} \sum_{\substack{d\mid n;\,(d,k)=1 \\ (d,n/d)=1}} f(d).$$

(vi) Soit y un nombre réel fixe ($y \geqslant 2$) et $\tau_A(n) = \sum_{\substack{d\mid n \\ P(d)\leqslant y}} \mu^2(d)$, alors

$$f_A(n) = \frac{1}{\tau_A(n)} \sum_{\substack{d\mid n \\ P(d)\leqslant y}} \mu^2(d) f(d).$$ Soit $f \in \mathscr{A}$ alors $f_A(n) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{p\mid n \\ p\leqslant y}} f(p)$.

En particulier, si $P(n) \leqslant y$ alors $f_A(n) = \hat{f}(n)$ et $f_A(n) = 0$ si $p(n) > y$, où $p(n)$ désigne le plus petit facteur premier de n, avec la convention $p(1) = 1$.

(vii) Soit $\tau_A(n) = \prod_{\substack{p^\alpha\| n \\ p>2}} (\alpha + 1)$ avec $\tau_A(2) = \tau_A(1) = 1$, alors

$$f_A(n) = \frac{1}{\tau_A(n)} \sum_{\substack{d\mid n \\ d \text{ impair}}} f(d).$$ En particulier, si n est impair alors $f_A(n) = \bar{f}(n)$. Soit $f \in \mathscr{A}$, alors $f_A(n) = 0$ si $n = 2^m$ et

$$f_A(n) = \sum_{\substack{p^\alpha\| n \\ p\neq 2}} \frac{1}{\alpha+1} \sum_{m=1}^{\alpha} f(p^m)$$ si n n'est pas une puissance de 2.

(viii) Soit $\tau_A(n) = \sum_{\substack{d^k\mid n \\ (d^k,n/d^k)=1}} 1 = 2^{\#\{p : p^\alpha \| n \text{ avec } \alpha \equiv 0 \pmod k\}}$, alors

$$f_A(n) = \frac{1}{\tau_A(n)} \sum_{\substack{d^k\mid n \\ (d^k,n/(d^k))=1}} f(d).$$

(ix) Soit $y \geqslant 2$ fixe et $\tau_A(n) = \sum_{\substack{d\mid n \\ P(d)\leqslant y}} 1$, alors $f_A(n) = \frac{1}{\tau_A(n)} \sum_{\substack{d\mid n \\ P(d)\leqslant y}} f(d)$.

Soit $f \in \mathscr{A}$, alors $\bar{f}(n) = f_A(n) + \sum_{\substack{p^\alpha\| n \\ p>y}} \frac{1}{\alpha+1} \sum_{m=1}^{\alpha} f(p^m)$. En particulier $f_A(n) = \bar{f}(n)$ si $P(n) \leqslant y$ et $f_A(n) = 0$ si $p(n) > y$.

(x) La relation (5.2) est valable avec

$$\tau_A(n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{r} (\alpha_i + 1) & \text{si } n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \prod_{i>r}^{s} q_i^{\beta_i},\ (p_i, kl) = 1 \text{ et } q_i \nmid (k, l), \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

On peut même démontrer un résultat d'un caractère un peu plus général que le théorème 5.1 en considérant une fonction arithmétique multiplicative g qui n'a aucun lien avec un ensemble de diviseurs. C'est ainsi qu'on a le résultat suivant, dont le théorème 2.2 devient un cas particulier.

THÉORÈME 5.2. *Soit A une famille d'ensembles $A_n \subset D_n$ telle que la convolution $*_A$ est commutative. Supposons de plus que $\tau_A \in \mathscr{M}$. On considère U et g deux fonctions arithmétiques multiplicatives telles que $(U *_A g)(n) \neq 0$ pour chaque entier $n \geqslant 1$. Enfin, soit $f \in \mathbf{F}$, alors $\check{f}_A = \check{f}_A(g, U) := \dfrac{Uf *_A g}{U *_A g}$ est multiplicative si f est multiplicative, et additive si f est additive.*

Démonstration. On sait que le produit de Dirichlet de deux fonctions multiplicatives est multiplicatif (voir Apostol [1], p. 35). Cette propriété est également vraie pour le produit $*_A$ tel que défini ici. En effet, il est facile de démontrer que si f et g sont multiplicatives, alors $f *_A g$ est aussi multiplicative. Ainsi la première affirmation du théorème est vraie.

Pour démontrer le cas additif, on procède comme suit. Soit $f \in \mathscr{A}$, alors pour $(m, n) = 1$,

$$\begin{aligned}\check{f}_A(mn) &= \frac{(Uf *_A g)(m)\,(U *_A g)(n)}{(U *_A g)(mn)} + \frac{(Uf *_A g)(n)\,(U *_A g)(m)}{(U *_A g)(mn)} \\ &= \frac{(Uf *_A g)(m)}{(U *_A g)(m)} + \frac{(Uf *_A g)(n)}{(U *_A g)(n)} = \check{f}_A(m) + \check{f}_A(n)\,,\end{aligned}$$

d'où l'additivité de $\check{f}$.

REMARQUES

1) Pour déduire le théorème 2.2 du théorème 5.2, il suffit de poser $*_A = *$, $g \equiv 1$ et de substituer pour U les fonctions 1 et μ^2, et cela afin d'obtenir successivement $\check{f}_A = \bar{f}$ et $\check{f}_A = \hat{f}$. Pour obtenir $\check{f}_A = \tilde{f}$, en plus de poser $g = U \equiv 1$, il faut considérer la convolution unitaire $*_u$.

2) Nous avons vu que $\hat{f}$ ne satisfait pas la réciproque du théorème 2.2. De même la réciproque du théorème 5.2 n'est pas vraie: il suffit de choisir $*_A = *$, $U(n) = \mu^2(n)$ et $g(n) = 1(n)$ pour obtenir $\check{f}_A = \hat{f}$.

COROLLAIRE 5.3. *Etant donné $f \in \mathbf{F}$, il existe une fonction $h = h(f)$ telle que f est liée à la fonction ϕ d'Euler par la relation*

$$f(n) = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} h(d)\phi(d)\,. \tag{5.3}$$

En particulier $f \in \mathscr{A}$ *(respectivement* $f \in \mathscr{M}$*) si et seulement si* $h \in \mathscr{A}$ *(respectivement* $h \in \mathscr{M}$*).*

Démonstration. On pose $*_A = *$, $U(n) = n$ et $g(n) = \mu(n)$ dans le théorème 5.2 et on obtient ainsi la fonction

$$\check{f}(n) = \frac{1}{\phi(n)} \sum_{d \mid n} d f(d) \mu(n/d) . \tag{5.4}$$

La fonction h cherchée est alors $h = \check{f}$, car (5.4) implique $h(n)\phi(n) = \sum_{d \mid n} d f(d) \mu(n/d)$, de sorte que, par l'inversion de Moebius, on en déduit (5.3).

Avant d'énoncer le prochain corollaire, nous allons introduire la notion de nombre k-parfait. Soit k un entier ($k \geqslant 2$). On dit d'un entier n qu'il est k-parfait s'il existe m tel que $n = m^k$; en d'autres mots si les exposants des facteurs premiers (distincts) de n, dans sa décomposition canonique, sont des multiples de k, i.e.

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \quad \text{avec} \quad \alpha_i \equiv 0 \pmod{k} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \cdots, r .$$

COROLLAIRE 5.4. *Etant donné un nombre réel* r, *il existe une fonction arithmétique* $g_r \in \mathscr{F}\mathscr{M}$ *définie en (5.5) telle que* $n^r = \sum_{d \mid n} d^{r-1} \phi(d) g_r(d)$, *pour tout nombre naturel* n. *En particulier un entier positif* n *est k-parfait si et seulement si il existe* m *tel que* $n = \sum_{d \mid m} d^{k-1} \phi(d) g_k(d)$. *Pour des valeurs entières de* k, *la fonction* $n^{k-1}\phi(n) g_k(n)$ *est tout simplement la fonction indicatrice* $J_k(n)$ *de Jordan définie par* $J_k(n) := n^k \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right)$, *soit une généralisation de la fonction* ϕ *d'Euler.*

Démonstration. Soit r un nombre réel. On pose $f(n) = n^{r-1}$ dans le corollaire 5.3. On a ainsi $n^r = \sum_{d \mid n} h(d)\phi(d)$ avec $h(n) = \frac{1}{\phi(n)} \sum_{d \mid n} d^r \mu(n/d)$. En posant

$$g_r(n) := \prod_{p \mid n} \left(1 + \frac{1 - p^{1-r}}{p - 1}\right) \quad \text{avec} \quad g_0(n) = E(n) , \tag{5.5}$$

il vient

$$h(n) = \frac{1}{\phi(n)} \sum_{d \mid n} d^r \mu(n/d) = \prod_{p^\alpha \| n} p^{(r-1)\alpha} \left(1 + \frac{1 - p^{1-r}}{p - 1}\right) = n^{r-1} g_r(n) .$$

Ceci permet de déduire l'identité $n^r = \sum_{d \mid n} d^{r-1} \phi(d) g_r(d)$.

EXEMPLES. De ce dernier corollaire, on obtient facilement les identités suivantes:

$$\sqrt{n} = \sum_{d \mid n} \frac{\phi(d)}{\sqrt{d}} \prod_{p \mid d} (1 + p^{-1/2})^{-1},$$

$$10^r = \sum_{d \mid 10} d^{r-1} \phi(d) g_r(d),$$

$$\frac{1}{n} = \sum_{d \mid n} \frac{(-1)^{\omega(d)} \delta(d)}{d^2} \phi(d) ,$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sum_{d \mid 2} \frac{\phi(d)}{d^{3/2}} \prod_{p \mid d} (2 - p^{3/2}),$$

$$n^2 = \sum_{d \mid n} \phi(d) \sum_{c \mid d} c \mu^2(d/c) .$$

Comme on l'a mentionné dans la seconde remarque qui suit le théorème 5.2, la réciproque de ce théorème n'est pas toujours vraie. C'est dans ce contexte qu'il est intéressant de mentionner qu'on a quand même le résultat suivant.

THÉORÈME 5.5. *Soit* $*_A$ *une A-convolution commutative telle que* $\tau_A \in \mathscr{M}$ *et* $n \in A_n$ *pour chaque* $n \geqslant 1$. *Soit* $U \in \mathscr{M}$ *et* $g \in \mathscr{M}$ *tels que* $U(n) \neq 0$ *et* $(U *_A g)(n) \neq 0$ *pour chaque entier* $n \geqslant 1$. *Pour* $f \in \mathbf{F}$ *on pose* $\check{f}_A = \dfrac{Uf *_A g}{U *_A g}$. *Alors* f *est additive si* $\check{f}_A$ *est additive, et multiplicative si* $\check{f}_A$ *est multiplicative.*

Démonstration. Soit $f \in \mathbf{F}$ tel que $\check{f}_A \in \mathscr{A}$. On a $U(1) = g(1) = (U *_A g)(1) = 1$ d'où $(Uf *_A g)(1) = \check{f}(1)$ i.e. $f(1) = \check{f}(1)$. Il faut maintenant montrer que pour tout couple (m, n) d'entiers positifs relativement premiers, on a $f(mn) = f(m) + f(n)$. Supposons qu'il existe de tels couples pour lesquels la relation d'additivité pour f ne tient pas. Soit m_0 le plus petit élément de $\mathbf{N}$ pour lequel il existe au moins un entier positif n (premier avec m_0) tel que $f(m_0 n) \neq f(m_0) + f(n)$. D'autre part soit n_0 le plus petit parmi tous ces entiers n. Il est alors clair que:

$$1 < m_0 < n_0 \text{ avec } (m_0, n_0) = 1, \quad f(m_0 n_0) \neq f(m_0) + f(n_0)$$
$$f(ln) = f(l) + f(n) \text{ pour tout } n \text{ et } l \ (1 \leqslant l < m_0),\ (l, n) = 1$$
$$f(m_0 r) = f(m_0) + f(r) \text{ pour tout } r, 1 \leqslant r < n_0 \text{ et } (m_0, r) = 1 \ .$$

D'autre part, puisque tout diviseur de $m_0 n_0$ est le produit de deux entiers relativement premiers, l'un divisant m_0 et l'autre divisant n_0, et qu'en plus $\check{f}_A \in \mathscr{A}$ (avec $(U *_A g)(n) \neq 0, \forall n \geqslant 1$), il suit que

$$(Uf *_A g)(m_0 n_0) = (Uf *_A g)(m_0)(U *_A g)(n_0) + (Uf *_A g)(n_0)(U *_A g)(m_0) \ ,$$

soit l'égalité

$$\sum_{\substack{d_1 | n_0,\, d_1 \in A n_0 \\ d_2 | m_0,\, d_2 \in A m_0}} U(d_1 d_2) f(d_1 d_2) g\left(\frac{m_0 n_0}{d_1 d_2}\right)$$
$$= \sum_{\substack{d_1 | n_0,\, d_1 \in A n_0 \\ d_2 | m_0,\, d_2 \in A m_0}} U(d_1) U(d_2) (f(d_1) + f(d_2)) g\left(\frac{m_0 n_0}{d_1 d_2}\right) ,$$

qui peut également s'écrire

$$\sum_{\substack{d_1 | n_0,\, d_1 \in A n_0 \\ d_2 | m_0,\, d_2 \in A m_0}} U(d_1 d_2) (f(d_1 d_2) - f(d_1) - f(d_2)) g\left(\frac{m_0 n_0}{d_1 d_2}\right) = 0 \ .$$

Mais tous les termes de cette somme sont nuls sauf lorsque $d_1 = n_0$ et $d_2 = m_0$. Il suit que $U(m_0 n_0)(f(m_0 n_0) - f(n_0) - f(m_0)) = 0$, i.e. $f(m_0 n_0) = f(m_0) + f(n_0)$, ce qui contredit le choix minimal de m_0. D'où l'additivité de f. La démonstration du cas où $f \in \mathscr{M}$ se fait de manière analogue.

Remarque. Pour déduire la réciproque du théorème 2.2 dans le cas de $\bar{f}$ et celui de $\tilde{f}$, en utilisant le théorème 5.5, il faut poser $U = g \equiv 1$: on obtient alors successivement $\check{f}_A = \bar{f}$ en substituant $*$ à $*_A$ et $\check{f}_A = \tilde{f}$, en substituant $*_u$ à $*_A$.

RÉFÉRENCES

[1] Apostol, T.M. *Introduction to Analytic Number Theory.* Springer-Verlag (New York), 1976.

[2] Bingham, N.H., C.M. Goldie and J.L. Teugels. *Regular Variation.* Encyclopedia of mathematics and its applications (27), Cambridge University Press, 1989.