Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 41 (1995)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FORMES QUADRATIQUES DEVENANT ISOTROPES SUR UNE EXTENSION

Autor: Bayer-Fluckiger, Eva

Kapitel: 4. Extensions finies – le théorème de Springer

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-61819

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Il suffit de considérer le cas où q est anisotrope. Montrons ce lemme par récurrence sur le nombre de X_i qui interviennent dans f et sur $\deg_{X_1}(f)$. Si f est constant, alors par hypothèse $f \in <D(q)> \subset <D_m(q)>$. Le lemme est donc vrai dans ce cas. Supposons que X_1 intervienne dans f. Le polynôme f divise $q(\phi_1, \ldots, \phi_n)$, avec $\phi_i \in k[X_1, \ldots, X_m]$, non tous divisibles par f. Considérons f et les ϕ_i comme des polynômes de $k(X_2, \ldots, X_m)[X_1]$. Réduisons les ϕ_i modulo f, et notons $\bar{\phi}_i$ les polynômes réduits. Multiplions-les par leur dénominateur commun, lequel est un élément de $k[X_2, \ldots, X_m]$, et soient $\phi'_1, \ldots, \phi'_n$ les polynômes de $k[X_1, \ldots, X_m]$ ainsi obtenus. On a donc

$$fh = q(\phi'_1, \ldots, \phi'_n)$$

avec $h, \phi'_1, \ldots, \phi'_n \in k[X_1, \ldots, X_m]$, et $\deg_{X_1}(\phi'_i) < \deg_{X_1}(f)$. Alors on a aussi $\deg_{X_1}(h) < \deg_{X_1}(f)$. Par hypothèse de récurrence, $h \in <D_m(q)>$. On a donc $f \in <D_m(q)>$.

Démonstration du théorème 1.

$a) \Rightarrow c)$: Comme $f \in <D_m(q)>$, le coefficient a du terme de plus haut degré de f est dans $<D(q)>$. L'hypothèse entraîne aussi qu'il existe $x_1, \ldots, x_s \in k[X_1, \ldots, X_m]^n$ tels que $q(x_1), \ldots, q(x_s)$ soient des représentations primitives de q sur $k[X_1, \ldots, X_m]$, et que l'on ait l'égalité

$$f = af_1 \ldots f_r = q(x_1) \ldots q(x_s)$$

dans $k(X_1, \ldots, X_m)^* / k(X_1, \ldots, X_m)^{*2}$. Comme les polynômes f_i sont irréductibles et distincts, chacun d'entre eux divise l'un des $q(x_j)$. En réduisant x_j modulo f_i, on obtient un zéro non trivial de q sur $k(f_i)$.

$c) \Rightarrow b)$: Comme $q_{k(f_i)}$ est isotrope, f_i divise une représentation primitive de q sur $k[X_1, \ldots, X_m]$. Par le lemme, $f_i \in <D_m(q)>$.

$b) \Rightarrow a)$ est trivial.

4. Extensions finies – le théorème de Springer

Soit $m = 1$, et notons $X = X_1$. Le corps $k(f)$ est alors une extension finie de k. Le corollaire du théorème entraîne le théorème de Springer [8]:

Théorème de Springer. *Si une forme quadratique devient isotrope sur une extension de degré impair, alors elle est isotrope.*

En effet, soit E une extension de degré impair de k. Toute extension peut être obtenue comme composée d'extensions monogènes. On peut donc supposer que E est de la forme $E = k(f)$, où f est un polynôme irréductible et unitaire de degré impair. Soit q une forme quadratique anisotrope et représentant 1. Alors tous les polynômes appartenant à $D(q_{k(X)}) = D_1(q)$ sont de degré pair. Donc f n'est pas dans $<D_1(q)>$. Par le corollaire du théorème 1, ceci implique que q n'est pas isotrope sur E.

De même, le théorème 2 entraîne la forme faible du théorème de Springer:

THÉORÈME DE SPRINGER (forme faible). *Si une forme quadratique devient hyperbolique sur une extension de degré impair, alors elle est hyperbolique.*

5. EXTENSIONS FINIES
FORMULATIONS ÉQUIVALENTES DES CRITÈRES DU §2

On suppose encore que $m = 1$. Dans ce cas, on obtient des reformulations intéressantes des critères du §2, en particulier en termes de «principes de normes». Le but de ce paragraphe est de faire remarquer que les théorèmes ci-dessous sont *équivalents*.

Soit q une forme quadratique anisotrope et représentant 1 sur k.

THÉORÈME 3 (cor. du th. 1). *Soit $f \in k[X]$ un polynôme irréductible et unitaire. On a:*

$$q_{k(f)} \text{ est isotrope } \Rightarrow f \in <D(q_{k(X)})> .$$

THÉORÈME 4 (Théorème de la norme de Knebusch). *Soit E une extension finie de k. Alors on a:*

$$N_{E/k}(<D(q_E)>) \subset <D(q)> .$$

THÉORÈME 5. *Le groupe $<N_{E/k}(E^*)>$ engendré par les normes des extensions finies E de k telles que q_E soit isotrope est contenu dans $<D(q)>$.*

Th. 3 $\Rightarrow$ th. 4: Comme q représente 1 sur k, il existe $a_1, \ldots, a_{n-1} \in k^*$ tels que $q \simeq <1, a_1, \ldots, a_{n-1}>$. Soit $\alpha \in D(q_E)$. Il existe $x, x_1, \ldots, x_{n-1} \in E$ tels que $\alpha = x^2 + a_1 \cdot x_1^2 + \ldots + a_{n-1} \cdot x_{n-1}^2$. Posons $a = a_1 \cdot x_1^2 + \ldots + a_{n-1} \cdot x_{n-1}^2$. Alors $q_E \simeq <1, a> \oplus q'$, et $\alpha = x^2 + a$. Posons