

2. Critères

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Pour toute forme quadratique q , on note $G(q) \subset k^*/k^{*2}$ le groupe des multiplicateurs de similitude de q :

$$G(q) = \{ \alpha \in k^*/k^{*2} \mid \alpha \cdot q \simeq q \} .$$

Soit $D(q) \subset k^*/k^{*2}$ l'ensemble des éléments représentés par q , c'est-à-dire l'ensemble des $\alpha \in k^*/k^{*2}$ tels qu'il existe $v \in V$ avec $q(v) = \alpha$.

Remarquons que si q représente 1, alors $G(q) \subset D(q)$.

Soit $\langle D(q) \rangle$ le sous-groupe de k^*/k^{*2} engendré par $D(q)$. (Ce groupe est égal au groupe des *normes spinorielles* de q (voir par exemple [4], p. 109), mais cette interprétation ne jouera aucun rôle dans la suite).

Soient $a_1, \dots, a_r \in k^*$, et posons $\ll a_1, \dots, a_r \gg = \langle 1, a_1 \rangle \otimes \dots \otimes \langle 1, a_r \rangle$. C'est une forme à 2^r variables, appelée la r -forme de Pfister associée à a_1, \dots, a_r .

Si q est une forme de Pfister, alors $G(q) = D(q) = \langle D(q) \rangle$ (cf. [7], chap. 2, §10 ou [4], chap. 10, cor. 1.7).

2. CRITÈRES

Soit $k[X_1, \dots, X_m]$ l'anneau des polynômes à m variables sur k . On ordonne les monômes de $k[X_1, \dots, X_m]$ par l'ordre lexicographique. On dit que $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ est *unitaire* si le coefficient du terme de plus haut degré de f est égal à 1.

Si f est irréductible, on note $k(f)$ le corps des fractions de $k[X_1, \dots, X_m]/(f)$.

Soit q une forme anisotrope de dimension n . On s'intéressera aux extensions $E = k(f)$ de k sur lesquelles q devient isotrope. Si q_E est isotrope, alors il en est de même de $\alpha \cdot q_E$, pour tout $\alpha \in k^*$. On peut donc supposer que q représente 1.

Soient $G_m(q) = G(q_{k(X_1, \dots, X_m)})$, $D_m(q) = D(q_{k(X_1, \dots, X_m)})$, et $\langle D_m(q) \rangle = \langle D(q_{k(X_1, \dots, X_m)}) \rangle$.

Le théorème 1 et son corollaire sont des reformulations de résultats de Witt [9]:

THÉORÈME 1. *Soit q une forme quadratique anisotrope qui représente 1. Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ et soient $a \in k^*$, $f_i \in k[X_1, \dots, X_m]$ irréductibles, unitaires et distincts tels que $f = a f_1 \dots f_r$.*

Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- a) $f \in \langle D_m(q) \rangle$;
- b) $a \in \langle D(q) \rangle$ et $f_i \in \langle D_m(q) \rangle$ pour tout $i = 1, \dots, r$;
- c) $a \in \langle D(q) \rangle$ et $q_{k(f_i)}$ est isotrope pour tout $i = 1, \dots, r$.

En particulier, on a:

COROLLAIRE. Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ irréductible et unitaire. Alors $f \in \langle D_m(q) \rangle$ si et seulement si $q_{k(f)}$ est isotrope.

Remarquons qu'il y a une forte analogie entre le théorème 1 et le résultat suivant de Knebusch [3]:

THÉORÈME 2. Soit q une forme quadratique anisotrope qui représente 1. Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$, et soient $a \in k^*$, $f_i \in k[X_1, \dots, X_m]$ irréductibles, unitaires et distincts tels que $f = a f_1 \dots f_r$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- a) $f \in G_m(q)$;
- b) $a \in G(q)$ et $f_i \in G_m(q)$ pour tout $i = 1, \dots, r$;
- c) $a \in G(q)$ et $q_{k(f_i)}$ est hyperbolique pour tout $i = 1, \dots, r$.

COROLLAIRE. Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ irréductible et unitaire. Alors $f \in G_m(q)$ si et seulement si $q_{k(f)}$ est hyperbolique.

Remarque. Si q est une forme de Pfister, alors les théorèmes 1 et 2 sont équivalents. En effet, une forme de Pfister est isotrope si et seulement si elle est hyperbolique (voir par exemple [7], chap. 2, §10 ou [4], chap. 10, §1), et les groupes $G(q_E)$ et $\langle D(q_E) \rangle$ coïncident pour toute extension E de k .

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$. On dit que f est *normé* (par rapport à q) si le coefficient du terme de plus haut degré de f appartient à $\langle D(q) \rangle$.

Une *représentation primitive* de q sur $k[X_1, \dots, X_m]$ est un polynôme de la forme $q(\phi_1, \dots, \phi_n)$, avec $\phi_i \in k[X_1, \dots, X_m]$ premiers entre eux dans leur ensemble.

LEMME. Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ un polynôme irréductible et normé. Supposons que f divise une représentation primitive de q sur $k[X_1, \dots, X_m]$. Alors $f \in \langle D_m(q) \rangle$.