

## 2.10. Mesure d'entropie maximale

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

l'élément  $(\xi_-, \xi_+, t)$  de  $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}$ , associons l'unique élément  $\gamma$  de  $G\Lambda$  vérifiant (voir figure 5):

$$(2.9.1) \quad \gamma(-\infty) = \xi_-, \gamma(+\infty) = \xi_+, B_{\xi_+}(x, \gamma(0)) = t.$$

Le lecteur vérifiera aisément que l'application ainsi définie est un homéomorphisme. Notons que dans ces coordonnées  $\Phi_T$  s'écrit:

$$(2.9.2) \quad \Phi_T(\xi_-, \xi_+, t) = (\xi_-, \xi_+, t + T).$$

Notons également que les sous-ensembles fortement stables du flot ont pour coordonnées (voir 2.8.5):

$$(2.9.3) \quad \{(\xi_-, \xi_+, t), \xi_- \in \Lambda - \{\xi_+\}\}.$$

Par ailleurs, en coordonnées l'action de  $\Gamma$  s'écrit:

$$(2.9.4) \quad g(\xi_-, \xi_+, t) = (g\xi_-, g\xi_+, t - B_{\xi_+}(x, g^{-1}x)).$$

Aussi, on obtient un homéomorphisme:

$$(2.9.5) \quad (\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R} / \sim \rightarrow \mathcal{E}$$

en définissant la relation d'équivalence suivante sur  $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}$ :

$$(\xi_-, \xi_+, t) \sim (\xi'_-, \xi'_+, t')$$

si et seulement si, il existe  $g \in \Gamma$  tel que:

$$\xi'_- = g\xi_-, \xi'_+ = g\xi_+, t' = t - B_{\xi_+}(x, g^{-1}x).$$

## 2.10. MESURE D'ENTROPIE MAXIMALE

On rappelle ici une construction de la mesure d'entropie maximale du flot géodésique, due à D. Sullivan ([Su], [Su2]), dans le cas des groupes convexes cocompacts d'isométries de  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$ , puis généralisée par V. Kaimanovich [K].

Soit  $x$  un élément de  $X$ , et soit respectivement  $\tau$  et  $\nu_x$  la dimension et la mesure de Hausdorff de  $(\Lambda, d_x)$  (voir 2.7). La mesure:

$$(2.10.1) \quad \mu = \frac{\nu_x \times \nu_x}{[d_x(\xi, \xi')]^{2\tau}}$$

est une mesure de Radon sur  $\Lambda \times \Lambda - \Delta$ . Elle est indépendante de  $x$  et  $\Gamma$ -invariante. En effet  $\{\nu_x, \nu \in X\}$  est une mesure  $\tau$ -conforme (voir 2.7.4), de plus d'après 2.4.2 et 2.7.1:

$$d_y(\xi, \xi') = d_x(\xi, \xi') [p(x, y, \xi) p(x, y, \xi')]^{1/2}.$$

Le paramétrage de Hopf permet d'identifier  $G\Lambda$  à  $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}$ . Soit alors  $\tilde{m}$  la mesure sur  $G\Lambda$  définie par :

$$\tilde{m} = \mu \times dt .$$

C'est une mesure de Radon.  $\Gamma$ -invariante et  $\Phi_T$ -invariante. La mesure  $m$ , restriction de  $\tilde{m}$  au compact  $\mathcal{E}$ , (considéré comme un domaine fondamental de  $\Gamma$  dans  $G\Lambda$ ), est finie et  $\Phi_T$ -invariante. On a :

2.10.2. THÉORÈME.  $\Phi_T$  est ergodique sur  $(\mathcal{E}, m)$ .

La preuve de ce théorème est mot pour mot la preuve classique de Hopf [Ho]. Le point essentiel est que  $\mu$  s'écrit comme un produit de deux mesures sur  $\Lambda$ .

Clairement, l'ergodicité de  $\Phi_T$  sur  $(\mathcal{E}, m)$  est équivalente à celle de  $\Gamma$  sur  $(\Lambda \times \Lambda - \Delta, \mu)$ . Puisque  $\mu$  et  $\nu_x \times \nu_x$  sont absolument continues, l'ergodicité de  $\Gamma$  sur  $(\Lambda \times \Lambda - \Delta, \mu)$  entraîne l'ergodicité de  $\Gamma$  sur  $(\Lambda, \nu_x)$ . D'où,

2.10.3. COROLLAIRE. L'action de  $\Gamma$  est ergodique sur  $(\Lambda \times \Lambda - \Delta, \mu)$  et sur  $(\Lambda, \nu_x)$ .

Notons respectivement  $h$  et  $h_m$ , l'entropie topologique de  $\Phi_T$  et l'entropie mesurable de  $(\Phi_T, m)$ . Elles se calculent comme dans le cas convexe cocompact (voir [Su2], p. 275-276, [K]). On obtient :

2.10.4. THÉORÈME.  $h = h_m = \tau$ . Ainsi  $m$  maximise l'entropie mesurable.

2.11. PREUVE DU THÉORÈME 2.0.1.

Nous renvoyons à l'introduction pour les notations. Nous montrons d'abord deux lemmes :

Soient  $x_1, x_2$  des origines respectivement de  $X_1$  et  $X_2$ . Notons  $d_1$  et  $d_2$  les métriques  $d_{x_1}$  et  $d_{x_2}$  sur  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$ .

2.11.1. LEMME. Supposons que l'application  $\Omega: (\Lambda_1, d_1) \rightarrow (\Lambda_2, d_2)$  soit conforme. Alors, son facteur conforme  $\omega$  est continu sur  $\Lambda_1$ .

2.11.2. Preuve de 2.11.1. Puisque  $\Omega$  est conforme, les ensembles limites  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  ont même dimension de Hausdorff  $\tau$ . De plus, en notant  $\nu_1$  et  $\nu_2$  les  $\tau$ -mesures de Hausdorff de  $(\Lambda_1, d_1)$  et  $(\Lambda_2, d_2)$ , on a :

$$(1) \quad \Omega^* \nu_2 = \omega^\tau \nu_1 .$$