2.10. Mesure d'entropie maximale

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

l'élément (ξ_-, ξ_+, t) de $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}$, associons l'unique élément γ de $G\Lambda$ vérifiant (voir figure 5):

$$\gamma(-\infty) = \xi_-, \gamma(+\infty) = \xi_+, B_{\xi_+}(x, \gamma(0)) = t . \tag{2.9.1}$$

Le lecteur vérifiera aisément que l'application ainsi définie est un homéomorphisme. Notons que dans ces coordonnées Φ_T s'écrit:

$$\Phi_T(\xi_-, \xi_+, t) = (\xi_-, \xi_+, t + T) . \tag{2.9.2}$$

Notons également que les sous-ensembles fortement stables du flot ont pour coordonnées (voir 2.8.5):

$$\{(\xi_-, \xi_+, t), \ \xi_- \in \Lambda - \{\xi_+\}\} . \tag{2.9.3}$$

Par ailleurs, en coordonnées l'action de Γ s'écrit:

$$g(\xi_-, \xi_+, t) = (g\xi_-, g\xi_+, t - B_{\xi_+}(x, g^{-1}x)) . \tag{2.9.4}$$

Aussi, on obtient un homéomorphisme:

$$(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}/_{\sim} \to \mathscr{E} \tag{2.9.5}$$

en définissant la relation d'équivalence suivante sur $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}$:

$$(\xi_-, \xi_+, t) \sim (\xi'_-, \xi'_+, t')$$

si et seulement si, il existe $g \in \Gamma$ tel que:

$$\xi'_- = g\xi_-, \xi'_+ = g\xi_+, t' = t - B_{\xi_+}(x, g^{-1}x) .$$

2.10. Mesure d'entropie maximale

On rappelle ici une construction de la mesure d'entropie maximale du flot géodésique, due à D. Sullivan ([Su], [Su2]), dans le cas des groupes convexes cocompacts d'isométries de $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$, puis généralisée par V. Kaimanovich [K].

Soit x un élément de X, et soit respectivement τ et ν_x la dimension et la mesure de Hausdorff de (Λ, d_x) (voir 2.7). La mesure:

$$\mu = \frac{\nu_x \times \nu_x}{[d_x(\xi, \xi')]^{2\tau}} \tag{2.10.1}$$

est une mesure de Radon sur $\Lambda \times \Lambda - \Delta$. Elle est indépendante de x et Γ-invariante. En effet $\{\nu_x, \nu \in X\}$ est une mesure τ-conforme (voir 2.7.4), de plus d'après 2.4.2 et 2.7.1:

$$d_y(\xi, \xi') = d_x(\xi, \xi') \, [p(x, y, \xi) p(x, y, \xi')]^{1/2} .$$

Le paramétrage de Hopf permet d'identifier $G\Lambda$ à $(\Lambda \times \Lambda - \Delta) \times \mathbf{R}$. Soit alors $\tilde{m}$ la mesure sur $G\Lambda$ définie par:

$$\tilde{m} = \mu \times dt .$$

C'est une mesure de Radon. Γ-invariante et Φ_T-invariante. La mesure m, restriction de $\tilde{m}$ au compact $\mathscr{C}$, (considéré comme un domaine fondamental de Γ dans $G\Lambda$), est finie et Φ_T-invariante. On a:

2.10.2. THÉORÈME. *Φ_T est ergodique sur $(\mathscr{C}, m)$.*

La preuve de ce théorème est mot pour mot la preuve classique de Hopf [Ho]. Le point essentiel est que μ s'écrive comme un produit de deux mesures sur Λ.

Clairement, l'ergodicité de Φ_T sur $(\mathscr{C}, m)$ est équivalente à celle de Γ sur $(\Lambda \times \Lambda - \Delta, \mu)$. Puisque μ et $\nu_x \times \nu_x$ sont absolument continues, l'ergodicité de Γ sur $(\Lambda \times \Lambda - \Delta, \mu)$ entraîne l'ergodicité de Γ sur (Λ, ν_x). D'où,

2.10.3. COROLLAIRE. *L'action de Γ est ergodique sur $(\Lambda \times \Lambda - \Delta, \mu)$ et sur (Λ, ν_x).*

Notons respectivement h et h_m, l'entropie topologique de Φ_T et l'entropie mesurable de (Φ_T, m). Elles se calculent comme dans le cas convexe cocompact (voir [Su2], p. 275-276, [K]). On obtient:

2.10.4. THÉORÈME. *$h = h_m = \tau$. Ainsi m maximise l'entropie mesurable.*

2.11. PREUVE DU THÉORÈME 2.0.1.

Nous renvoyons à l'introduction pour les notations. Nous montrons d'abord deux lemmes:

Soient x_1, x_2 des origines respectivement de X_1 et X_2. Notons d_1 et d_2 les métriques d_{x_1} et d_{x_2} sur Λ_1 et Λ_2.

2.11.1. LEMME. *Supposons que l'application $\Omega: (\Lambda_1, d_1) \to (\Lambda_2, d_2)$ soit conforme. Alors, son facteur conforme ω est continu sur Λ_1.*

2.11.2. *Preuve de 2.11.1.* Puisque Ω est conforme, les ensembles limites Λ_1 et Λ_2 ont même dimension de Hausdorff τ. De plus, en notant ν_1 et ν_2 les τ-mesures de Hausdorff de (Λ_1, d_1) et (Λ_2, d_2), on a:

$$\Omega^* \nu_2 = \omega^\tau \nu_1 . \tag{1}$$