

## 2.4. Produit de Gromov de deux éléments de $X$

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

D'après 2.2.2, ils sont indépendants de  $x$ . Plus précisément, l'ensemble de niveau  $t$  de  $f_x$  est égal à l'ensemble de niveau  $t - B_\xi(x, y)$  de  $f_y$ . Ce sont les horosphères en  $\xi$ .

La distance horosphérique s'exprime maintenant de la manière suivante: Soient  $H_{x, \xi}$  et  $H_{y, \xi}$  les horosphères en  $\xi$ , passant par  $x$  et  $y$ . On a d'après 2.2.3:

$$|B_\xi(x, y)| = d(x, H_{y, \xi}) = d(H_{x, \xi}, H_{y, \xi}) .$$

Signalons aussi une autre définition des horosphères, qui permet de les relier aux sous-espaces fortement stables et fortement instables du flot géodésique: Soit  $\xi \in \partial X$ . Pour  $x \in X$ , notons  $r_x: [0, +\infty[ \rightarrow X$  le rayon géodésique issu de  $x$  et d'extrémité  $\xi$ . Alors:

$$(2.3.1) \quad H_{x, \xi} = \{y \in X \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} |r_x(t) - r_y(t)| = 0\} .$$

Notons que les deux définitions coïncident, grâce à 2.2.0.

#### 2.4. PRODUIT DE GROMOV DE DEUX ÉLÉMENTS DE $\partial X$

Soit  $x, y, z$  trois points de  $X$ . Rappelons que le produit de Gromov de  $y, z$  relativement à  $x$ , est défini par (voir figure 0):

$$(y | z)_x = \frac{1}{2} (|x - y| + |x - z| - |y - z|)$$

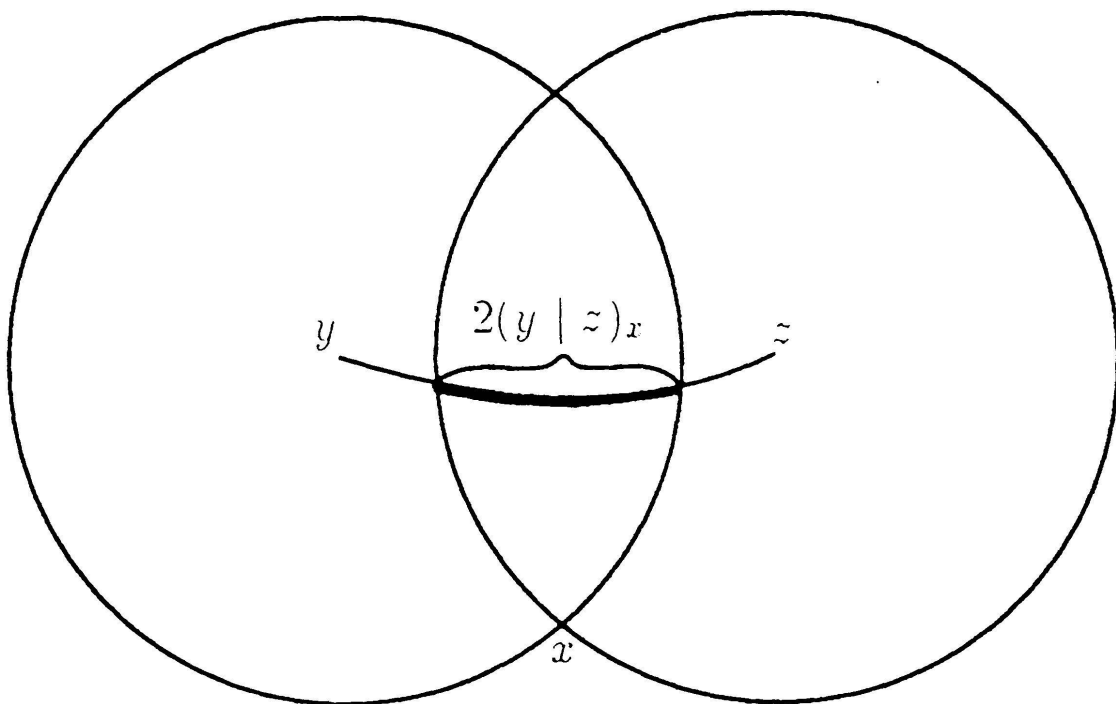


FIGURE 0

Soit maintenant  $\xi, \xi'$  deux points distincts de  $\partial X$ ,  $x$  un point de  $X$ , et  $p$  appartenant à  $(\xi\xi')$ . Suivant V. Kaimanovich [K], considérons l'expression:

$$\frac{1}{2}(B_\xi(x, p) + B_{\xi'}(x, p)) .$$

Elle est indépendante du point  $p$  choisi sur  $(\xi\xi')$ . On l'appellera produit de Gromov de  $\xi$  et  $\xi'$  relativement à  $x$ , et on la notera  $(\xi | \xi')_x$ . (Voir figure 1.)

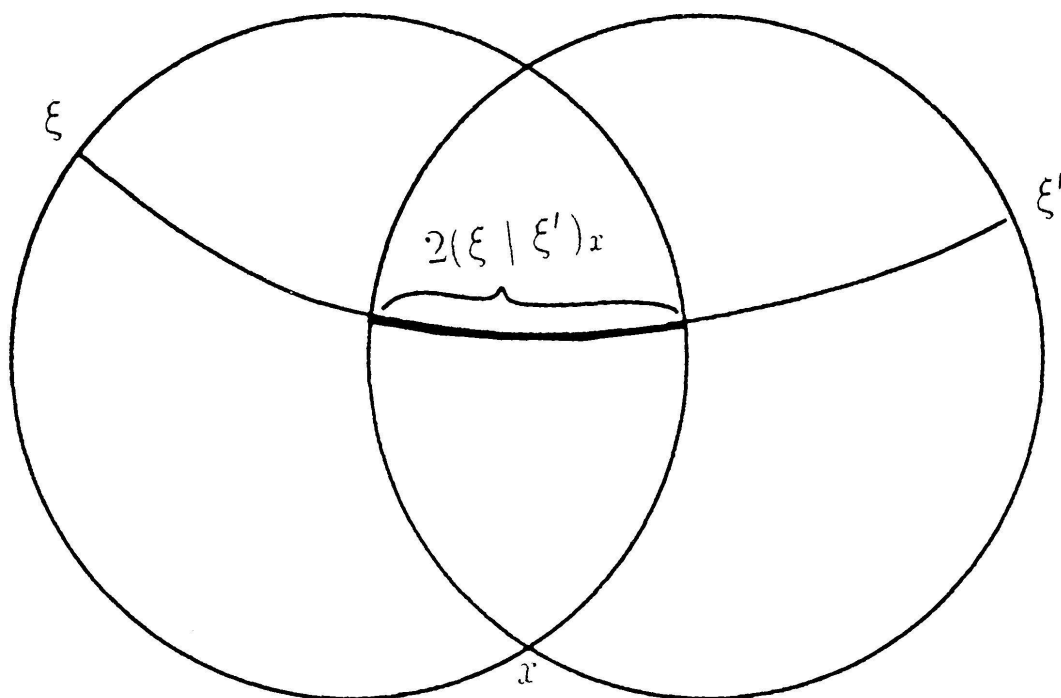


FIGURE 1

Notons que

$$(2.4.1) \quad (\xi | \xi')_x = (\xi' | \xi)_x$$

$$(2.4.2) \quad (\xi | \xi')_y = (\xi | \xi')_x - \frac{1}{2}(B_\xi(x, y) + B_{\xi'}(x, y)) .$$

Le lecteur vérifiera sans peine la proposition suivante:

2.4.3. PROPOSITION. Soit  $y \in [x\xi)$  et  $y' \in [x\xi')$ . Le produit de Gromov  $(y | y')_x$  converge vers  $(\xi | \xi')_x$ , lorsque  $y$  et  $y'$  tendent respectivement vers  $\xi$  et  $\xi'$ .

## 2.5. UNE FAMILLE DE MÉTRIQUES VISUELLES SUR $\partial X$

Soit  $x$  une origine dans  $X$ . Pour  $\xi, \xi' \in \partial X$ , définissons:

$$d_x(\xi, \xi') = e^{-(\xi | \xi')_x} \quad \text{si } \xi \neq \xi'$$

$$d_x(\xi, \xi') = 0 \quad \text{sinon .}$$