1.7. Groupes hyperboliques

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

1.7. GROUPES HYPERBOLIQUES

Soit Γ un groupe de type fini et $S = \{a_i, i = 1, \ldots, s\}$ un système de générateurs de Γ. Supposons S symétrique, c'est-à-dire:

$$\forall i \in \{1, \ldots, s\}; \ a_i \neq e$$

et

$$a_i \in S \Rightarrow a_i^{-1} \in S .$$

La métrique des mots relative à S, est définie de la manière suivante:

$$|g - g'|_S = \inf\{n \in \mathbf{N} \mid g^{-1}g' = a_{i_1} \ldots a_{i_n}, \ a_{i_k} \in S\} .$$

La distance $|e - g|_S$ sera généralement notée $|g|_S$. Observons que Γ agit à gauche par isométries sur $(\Gamma, |\ |_S)$.

Le graphe de Cayley $\mathscr{G}(\Gamma, S)$ est un 1-complexe simplicial géodésique et propre, dans lequel $(\Gamma, |\ |_S)$ est plongé isométriquement. Ses sommets sont les éléments de Γ, deux sommets g, g' sont reliés par une arête si $g^{-1}g' \in S$, c'est-à-dire si $|g - g'|_S = 1$. Il est muni de la métrique simpliciale, c'est-à-dire de la métrique de longueur qui donne à chaque arête une longueur un.

1.7.1. DÉFINITION. Le groupe Γ est hyperbolique si l'espace métrique géodésique propre $\mathscr{G}(\Gamma, S)$ est hyperbolique.

D'après l'invariance de l'hyperbolicité par quasi-isométrie, cette définition est indépendante du système de générateurs S. En effet, si S' en est un autre, $(\Gamma, |\ |_S)$ et $(\Gamma, |\ |_{S'})$, et par suite $\mathscr{G}(\Gamma, S)$ et $\mathscr{G}(\Gamma, S')$ sont quasi-isométriques.

1.7.2. EXEMPLES ET PROPRIÉTÉS. Sont hyperboliques:

a) Les groupes finis.

b) Les groupes libres de type fini.

c) Les groupes à petite simplification $C'(1/6)$. (Voir [G-H], Appendice.)

Un groupe hyperbolique jouit des propriétés suivantes:

a) Il est de présentation finie, et «presque tout» groupe de présentation finie est hyperbolique (voir [Ch], théorème 1.3.2).

b) Il ne contient qu'un nombre fini de classes de conjugaison d'éléments de torsion (voir [Ch], p. 20).

c) Il ne contient aucun sous-groupe abélien de rang supérieur ou égal à 2.

d) Ou bien il est fini, ou bien il est une extension finie de **Z**, ou bien il contient un groupe libre de rang au moins deux. Dans les deux premiers cas il est dit élémentaire. S'il est non élémentaire, il est à croissance exponentielle ([G-H], chapitre 8, théorème 37).

e) Il est automatique (voir [C-D-P], [C-E-H-P-T]).

1.8. GROUPES QUASI-CONVEXES

1.8.1. DÉFINITION. Soit X un espace métrique géodésique propre, et x un élément de X. Un sous-groupe d'isométries de X est quasi-convexe, s'il est proprement discontinu, et si l'orbite de x est un quasi-convexe de X.

On vérifie que la définition est indépendante du point x choisi. Notons qu'un sous-groupe d'isométries proprement discontinu cocompact, est quasi-convexe. La propreté de X permet de montrer:

1.8.2. PROPOSITION. *Un groupe quasi-convexe* Γ *d'isométries de* X, *est de type fini. De plus, si* S *est un système symétrique de générateurs de* Γ, *l'application:*

$$\begin{aligned}(\Gamma, |\ |_S) &\to X \\ g &\mapsto gx\end{aligned}$$

est une quasi-isométrie.

Pour montrer cette proposition, il suffit d'exhiber un système de générateurs S adéquat. Si l'orbite de x est C-quasi-convexe, on vérifie que l'ensemble:

$$S = \{a_i \in \Gamma - \{e\} \mid |x - a_i x|_X \leqslant 2C + 1\}$$

convient.

Supposons maintenant X hyperbolique. Alors, par l'invariance de l'hyperbolicité par quasi-isométrie:

1.8.3. COROLLAIRE. *Tout groupe quasi-convexe d'isométries d'un espace hyperbolique, est hyperbolique.*

Par l'invariance des quasi-convexes par quasi-isométries, on obtient la caractérisation suivante des groupes quasi-convexes:

1.8.4. COROLLAIRE. *Soit* Γ *un sous-groupe d'isométries d'un espace hyperbolique* X. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

a) Γ *est quasi-convexe.*