

# 1.7. Groupes hyperboliques

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## 1.7. GROUPES HYPERBOLIQUES

Soit  $\Gamma$  un groupe de type fini et  $S = \{a_i, i = 1, \dots, s\}$  un système de générateurs de  $\Gamma$ . Supposons  $S$  symétrique, c'est-à-dire:

$$\forall i \in \{1, \dots, s\}; a_i \neq e$$

et

$$a_i \in S \Rightarrow a_i^{-1} \in S.$$

La métrique des mots relative à  $S$ , est définie de la manière suivante:

$$|g - g'|_S = \inf\{n \in \mathbf{N} \mid g^{-1}g' = a_{i_1} \dots a_{i_n}, a_{i_k} \in S\}.$$

La distance  $|e - g|_S$  sera généralement notée  $|g|_S$ . Observons que  $\Gamma$  agit à gauche par isométries sur  $(\Gamma, ||_S)$ .

Le graphe de Cayley  $\mathcal{G}(\Gamma, S)$  est un 1-complexe simplicial géodésique et propre, dans lequel  $(\Gamma, ||_S)$  est plongé isométriquement. Ses sommets sont les éléments de  $\Gamma$ , deux sommets  $g, g'$  sont reliés par une arête si  $g^{-1}g' \in S$ , c'est-à-dire si  $|g - g'|_S = 1$ . Il est muni de la métrique simpliciale, c'est-à-dire de la métrique de longueur qui donne à chaque arête une longueur un.

1.7.1. DÉFINITION. Le groupe  $\Gamma$  est hyperbolique si l'espace métrique géodésique propre  $\mathcal{G}(\Gamma, S)$  est hyperbolique.

D'après l'invariance de l'hyperbolicité par quasi-isométrie, cette définition est indépendante du système de générateurs  $S$ . En effet, si  $S'$  en est un autre,  $(\Gamma, ||_S)$  et  $(\Gamma, ||_{S'})$ , et par suite  $\mathcal{G}(\Gamma, S)$  et  $\mathcal{G}(\Gamma, S')$  sont quasi-isométriques.

1.7.2. EXEMPLES ET PROPRIÉTÉS. Sont hyperboliques:

- a) Les groupes finis.
- b) Les groupes libres de type fini.
- c) Les groupes à petite simplification  $C'(1/6)$ . (Voir [G-H], Appendice.)

Un groupe hyperbolique jouit des propriétés suivantes:

- a) Il est de présentation finie, et «presque tout» groupe de présentation finie est hyperbolique (voir [Ch], théorème 1.3.2).
- b) Il ne contient qu'un nombre fini de classes de conjugaison d'éléments de torsion (voir [Ch], p. 20).
- c) Il ne contient aucun sous-groupe abélien de rang supérieur ou égal à 2.

d) Ou bien il est fini, ou bien il est une extension finie de  $\mathbf{Z}$ , ou bien il contient un groupe libre de rang au moins deux. Dans les deux premiers cas il est dit élémentaire. S'il est non élémentaire, il est à croissance exponentielle ([G-H], chapitre 8, théorème 37).

e) Il est automatique (voir [C-D-P], [C-E-H-P-T]).

## 1.8. GROUPES QUASI-CONVEXES

1.8.1. DÉFINITION. Soit  $X$  un espace métrique géodésique propre, et  $x$  un élément de  $X$ . Un sous-groupe d'isométries de  $X$  est quasi-convexe, s'il est proprement discontinu, et si l'orbite de  $x$  est un quasi-convexe de  $X$ .

On vérifie que la définition est indépendante du point  $x$  choisi. Notons qu'un sous-groupe d'isométries proprement discontinu cocompact, est quasi-convexe. La propriété de  $X$  permet de montrer:

1.8.2. PROPOSITION. *Un groupe quasi-convexe  $\Gamma$  d'isométries de  $X$ , est de type fini. De plus, si  $S$  est un système symétrique de générateurs de  $\Gamma$ , l'application:*

$$\begin{aligned} (\Gamma, ||_S) &\rightarrow X \\ g &\mapsto gx \end{aligned}$$

*est une quasi-isométrie.*

Pour montrer cette proposition, il suffit d'exhiber un système de générateurs  $S$  adéquat. Si l'orbite de  $x$  est  $C$ -quasi-convexe, on vérifie que l'ensemble:

$$S = \{a_i \in \Gamma - \{e\} \mid |x - a_i x|_X \leq 2C + 1\}$$

convient.

Supposons maintenant  $X$  hyperbolique. Alors, par l'invariance de l'hyperbolicité par quasi-isométrie:

1.8.3. COROLLAIRE. *Tout groupe quasi-convexe d'isométries d'un espace hyperbolique, est hyperbolique.*

Par l'invariance des quasi-convexes par quasi-isométries, on obtient la caractérisation suivante des groupes quasi-convexes:

1.8.4. COROLLAIRE. *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe d'isométries d'un espace hyperbolique  $X$ . Les assertions suivantes sont équivalentes:*

a)  $\Gamma$  est quasi-convexe.