a) *Si* Y *est hyperbolique et s'il existe une quasi-isométrie de* X *dans* Y, *alors* X *est hyperbolique.*

b) *Si* X *et* Y *sont quasi-isométriques, alors* X *est hyperbolique si et seulement si* Y *l'est.*

1.2.5. COROLLAIRE (Invariance des quasi-convexes par quasi-isométrie). *Soient* (X, d_X) (Y, d_Y) *deux espaces géodésiques et* f *une quasi-isométrie de* X *dans* Y. *Si* Y *est hyperbolique, l'image par* f *de tout quasi-convexe de* X *est un quasi-convexe de* Y.

1.3. CAT$(-b^2)$-ESPACES

Nous décrivons une généralisation des exemples 1.2.2. Ces espaces seront pour nous d'un intérêt particulier.

Soit (X, d_X) un espace métrique géodésique, et soit $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}(-b^2)$ l'espace hyperbolique réel deux-dimensionnel, à courbure constante $-b^2$.

A tout triangle $\Delta = [xy] \cup [yz] \cup [zx]$ de X associons un triangle $\bar{\Delta} = [\bar{x}\bar{y}] \cup [\bar{y}\bar{z}] \cup [\bar{z}\bar{x}]$ de $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}(-b^2)$ dont les côtés ont même longueur que ceux de Δ. Le triangle $\bar{\Delta}$ est unique à isométrie près. Il est appelé triangle de comparaison associé à Δ. Soit:

$$\begin{aligned} \Delta &\to \bar{\Delta} \\ s &\mapsto \bar{s} \end{aligned}$$

l'application naturelle dont la restriction à chacun des côtés de Δ est une isométrie.

1.3.1. DÉFINITION

a) On dit que Δ satisfait CAT$(-b^2)$ (comparaison Aleksandrov Theorem), si quels que soient s, t appartenant à Δ:

$$d_X(s, t) \leqslant d_{\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}(-b^2)}(\bar{s}, \bar{t}) .$$

b) X est un CAT$(-b^2)$-espace si tout triangle de X satisfait CAT$(-b^2)$.

Les CAT$(-b^2)$-espaces ont la plupart des propriétés des variétés riemanniennes simplement connexes à courbure $\leqslant -b^2$. En voici quelques-unes, immédiates à partir de la définition:

a) Deux points de X déterminent un unique segment géodésique.

b) X est $(\log 3/b)$-hyperbolique.

c) X est contractible.

d) La fonction distance entre deux segments géodésiques est strictement convexe.

Une autre propriété importante, est leur caractérisation locale suivante. Elle permet de construire de nombreux exemples de CAT$(-b^2)$-espace, dont les fameux polyèdres hyperboliques de M. Gromov (voir [G-H] chapitre 10, [Be], [Ha]).

1.3.2. DÉFINITION-THÉORÈME. L'espace X est dit à courbure inférieure ou égale à $-b^2$, si tout point de X admet un voisinage satisfaisant CAT$(-b^2)$. Si X est géodésique simplement connexe à courbure $\leqslant -b^2$, alors X est un CAT$(-b^2)$-espace.

1.4. BORD D'UN ESPACE HYPERBOLIQUE

Soit (X, d_X) un espace δ-hyperbolique. Afin de lui appliquer le théorème d'Ascoli, supposons-le propre (un espace métrique est propre, si ses boules fermées sont compactes).

Définissons $\mathscr{R}$ l'ensemble des rayons géodésiques et munissons-le de la relation d'équivalence suivante: Deux rayons sont équivalents s'ils sont à distance de Hausdorff bornée.

L'ensemble des classes d'équivalence est le bord de X, on le note ∂X.

On définit une topologie sur $X \cup \partial X$, de la manière suivante:

Soit x une origine dans X, et soit $\mathscr{R}(x)$ l'ensemble des rayons et des segments géodésiques:

$$\gamma : I \to X$$

où I est un intervalle du type $[0, +\infty[$ ou $[0, a]$, $a \in \mathbf{R}^+$, et γ vérifie $\gamma(0) = x$. Si $I = [0, a]$, convenons de prolonger γ à $[0, +\infty[$, en posant $\gamma(t) = \gamma(a)$ pour t supérieur à a. Munissons $\mathscr{R}(x)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. D'après le théorème d'Ascoli, $\mathscr{R}(x)$ est compact et l'application naturelle de $\mathscr{R}(x)$ dans $X \cup \partial X$ est surjective. Equipé de la topologie quotient, $X \cup \partial X$ est un compact, dans lequel l'espace métrique X est ouvert et dense. Ainsi le compact ∂X permet de compactifier X. On montre que la topologie est indépendante de l'origine x.

Le théorème d'Ascoli et les propriétés du paragraphe 1.2 donnent: