

## 1.3. \$CAT(-b^2)\$-espaces

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

- a) Si  $Y$  est hyperbolique et s'il existe une quasi-isométrie de  $X$  dans  $Y$ , alors  $X$  est hyperbolique.
- b) Si  $X$  et  $Y$  sont quasi-isométriques, alors  $X$  est hyperbolique si et seulement si  $Y$  l'est.

1.2.5. COROLLAIRE (Invariance des quasi-convexes par quasi-isométrie). Soient  $(X, d_X)$   $(Y, d_Y)$  deux espaces géodésiques et  $f$  une quasi-isométrie de  $X$  dans  $Y$ . Si  $Y$  est hyperbolique, l'image par  $f$  de tout quasi-convexe de  $X$  est un quasi-convexe de  $Y$ .

### 1.3. CAT( $-b^2$ )-ESPACES

Nous décrivons une généralisation des exemples 1.2.2. Ces espaces seront pour nous d'un intérêt particulier.

Soit  $(X, d_X)$  un espace métrique géodésique, et soit  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^2(-b^2)$  l'espace hyperbolique réel deux-dimensionnel, à courbure constante  $-b^2$ .

A tout triangle  $\Delta = [xy] \cup [yz] \cup [zx]$  de  $X$  associons un triangle  $\bar{\Delta} = [\bar{x}\bar{y}] \cup [\bar{y}\bar{z}] \cup [\bar{z}\bar{x}]$  de  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^2(-b^2)$  dont les côtés ont même longueur que ceux de  $\Delta$ . Le triangle  $\bar{\Delta}$  est unique à isométrie près. Il est appelé triangle de comparaison associé à  $\Delta$ . Soit:

$$\begin{aligned} \Delta &\rightarrow \bar{\Delta} \\ s &\mapsto \bar{s} \end{aligned}$$

l'application naturelle dont la restriction à chacun des côtés de  $\Delta$  est une isométrie.

#### 1.3.1. DÉFINITION

- a) On dit que  $\Delta$  satisfait CAT( $-b^2$ ) (comparaison Aleksandrov Theorem), si quels que soient  $s, t$  appartenant à  $\Delta$ :

$$d_X(s, t) \leq d_{\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^2(-b^2)}(\bar{s}, \bar{t}).$$

- b)  $X$  est un CAT( $-b^2$ )-espace si tout triangle de  $X$  satisfait CAT( $-b^2$ ).

Les CAT( $-b^2$ )-espaces ont la plupart des propriétés des variétés riemanniennes simplement connexes à courbure  $\leq -b^2$ . En voici quelques-unes, immédiates à partir de la définition:

- a) Deux points de  $X$  déterminent un unique segment géodésique.
- b)  $X$  est  $(\log 3/b)$ -hyperbolique.
- c)  $X$  est contractible.

d) La fonction distance entre deux segments géodésiques est strictement convexe.

Une autre propriété importante, est leur caractérisation locale suivante. Elle permet de construire de nombreux exemples de  $CAT(-b^2)$ -espace, dont les fameux polyèdres hyperboliques de M. Gromov (voir [G-H] chapitre 10, [Be], [Ha]).

1.3.2. DÉFINITION-THÉORÈME. L'espace  $X$  est dit à courbure inférieure ou égale à  $-b^2$ , si tout point de  $X$  admet un voisinage satisfaisant  $CAT(-b^2)$ . Si  $X$  est géodésique simplement connexe à courbure  $\leq -b^2$ , alors  $X$  est un  $CAT(-b^2)$ -espace.

#### 1.4. BORD D'UN ESPACE HYPERBOLIQUE

Soit  $(X, d_X)$  un espace  $\delta$ -hyperbolique. Afin de lui appliquer le théorème d'Ascoli, supposons-le propre (un espace métrique est propre, si ses boules fermées sont compactes).

Définissons  $\mathcal{R}$  l'ensemble des rayons géodésiques et munissons-le de la relation d'équivalence suivante: Deux rayons sont équivalents s'ils sont à distance de Hausdorff bornée.

L'ensemble des classes d'équivalence est le bord de  $X$ , on le note  $\partial X$ .

On définit une topologie sur  $X \cup \partial X$ , de la manière suivante:

Soit  $x$  une origine dans  $X$ , et soit  $\mathcal{R}(x)$  l'ensemble des rayons et des segments géodésiques:

$$\gamma: I \rightarrow X$$

où  $I$  est un intervalle du type  $[0, +\infty[$  ou  $[0, a]$ ,  $a \in \mathbf{R}^+$ , et  $\gamma$  vérifie  $\gamma(0) = x$ . Si  $I = [0, a]$ , convenons de prolonger  $\gamma$  à  $[0, +\infty[$ , en posant  $\gamma(t) = \gamma(a)$  pour  $t$  supérieur à  $a$ . Munissons  $\mathcal{R}(x)$  de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. D'après le théorème d'Ascoli,  $\mathcal{R}(x)$  est compact et l'application naturelle de  $\mathcal{R}(x)$  dans  $X \cup \partial X$  est surjective. Equipé de la topologie quotient,  $X \cup \partial X$  est un compact, dans lequel l'espace métrique  $X$  est ouvert et dense. Ainsi le compact  $\partial X$  permet de compactifier  $X$ . On montre que la topologie est indépendante de l'origine  $x$ .

Le théorème d'Ascoli et les propriétés du paragraphe 1.2 donnent: