1.2. Espaces hyperboliques géodésiques

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Quasi-convexe: Supposons X géodésique. Un sous-ensemble Z de X est C-quasi-convexe, si deux points quelconques de Z peuvent être reliés par un segment géodésique contenu dans le C-voisinage de Z dans X. Il est quasi-convexe, s'il est C-quasi-convexe pour un certain réel C.

1.2. Espaces hyperboliques géodésiques

Désormais, (X, d_X) est un espace métrique géodésique.

1.2.1. Définition

a) Le triangle $[xy] \cup [yz] \cup [zx]$ de X est δ-fin si pour tout u appartenant à $[xy]$, on a:

$$d_X(u, [yz] \cup [zx]) \leqslant \delta \, .$$

b) X est δ-hyperbolique si tout triangle de X est δ-fin. Il est hyperbolique, s'il est δ-hyperbolique pour un certain réel δ.

Observons qu'un espace δ-hyperbolique a la propriété suivante: deux segments géodésiques de mêmes extrémités, sont à distance de Hausdorff inférieure à δ. Autrement dit, chacun est contenu dans le δ-voisinage de l'autre.

1.2.2. Exemples (voir [C-D-P], chapitre 1, §4 et 5).

a) Un arbre métrique est 0-hyperbolique.

b) L'espace hyperbolique réel n-dimensionnel $\mathbf{H}^n_{\mathbf{R}}$ est $\log 3$-hyperbolique.

c) D'après le théorème de comparaison d'Aleksandrov-Toponogov, toute variété riemannienne simplement connexe à courbure $\leqslant -b^2$, est $(\log 3 / b)$-hyperbolique.

Une première propriété fondamentale des espaces hyperboliques est:

1.2.3. Théorème (Propriété des quasi-segments géodésiques). *Il existe une constante C ne dépendant que de λ, k, δ, avec la propriété suivante: tout (λ, k)-quasi-segment géodésique d'un espace δ-hyperbolique, est à distance de Hausdorff inférieure à C, de n'importe quel segment géodésique joignant ses extrémités.*

Dont on déduit immédiatement:

1.2.4. Corollaire (Invariance de l'hyperbolicité par quasi-isométrie). *Soient (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces géodésiques.*

a) *Si* Y *est hyperbolique et s'il existe une quasi-isométrie de* X *dans* Y, *alors* X *est hyperbolique.*

b) *Si* X *et* Y *sont quasi-isométriques, alors* X *est hyperbolique si et seulement si* Y *l'est.*

1.2.5. COROLLAIRE (Invariance des quasi-convexes par quasi-isométrie). *Soient* (X, d_X) (Y, d_Y) *deux espaces géodésiques et* f *une quasi-isométrie de* X *dans* Y. *Si* Y *est hyperbolique, l'image par* f *de tout quasi-convexe de* X *est un quasi-convexe de* Y.

1.3. CAT$(-b^2)$-ESPACES

Nous décrivons une généralisation des exemples 1.2.2. Ces espaces seront pour nous d'un intérêt particulier.

Soit (X, d_X) un espace métrique géodésique, et soit $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}(-b^2)$ l'espace hyperbolique réel deux-dimensionnel, à courbure constante $-b^2$.

A tout triangle $\Delta = [xy] \cup [yz] \cup [zx]$ de X associons un triangle $\bar{\Delta} = [\bar{x}\bar{y}] \cup [\bar{y}\bar{z}] \cup [\bar{z}\bar{x}]$ de $\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}(-b^2)$ dont les côtés ont même longueur que ceux de Δ. Le triangle $\bar{\Delta}$ est unique à isométrie près. Il est appelé triangle de comparaison associé à Δ. Soit:

$$\begin{aligned} \Delta &\to \bar{\Delta} \\ s &\mapsto \bar{s} \end{aligned}$$

l'application naturelle dont la restriction à chacun des côtés de Δ est une isométrie.

1.3.1. DÉFINITION

a) On dit que Δ satisfait CAT$(-b^2)$ (comparaison Aleksandrov Theorem), si quels que soient s, t appartenant à Δ:

$$d_X(s, t) \leqslant d_{\mathbf{H}^2_{\mathbf{R}}(-b^2)}(\bar{s}, \bar{t}) .$$

b) X est un CAT$(-b^2)$-espace si tout triangle de X satisfait CAT$(-b^2)$.

Les CAT$(-b^2)$-espaces ont la plupart des propriétés des variétés riemanniennes simplement connexes à courbure $\leqslant -b^2$. En voici quelques-unes, immédiates à partir de la définition:

a) Deux points de X déterminent un unique segment géodésique.

b) X est $(\log 3/b)$-hyperbolique.

c) X est contractible.