

Objektyp: **ReferenceList**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

sion  $2n - 1$  in  $\mathcal{M}_{B_n}$ , it follows that  $\psi \circ (f \times g)$  vanishes on the connected component of  $\Omega \cap \mathcal{M}_{B_n}$  containing  $(z_0, \bar{z}_0)$ . After shrinking  $U$  if necessary, we can assume that  $\psi \circ (f \times g)$  vanishes on  $\Omega \cap \mathcal{M}_{B_n}$  and thus  $(f \times g)(\Omega \cap \mathcal{M}_{B_n}) \subset \mathcal{M}_{B_n}$ . We consider the embedding  $\iota \times \iota: \mathbf{C}_n \times \mathbf{C}_n \hookrightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^n \times \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^n$  given by  $\iota(z_1, \dots, z_n) = (\sqrt{-1}: z_1: \dots: z_n)$ , which maps  $\mathcal{M}_{B_n}$  onto a (dense open) subset of  $\mathcal{M}_{\mathbf{C}}^n$ . By Corollary 7 applied to the maps

$$\tilde{f} = \iota \circ f \circ \iota^{-1}: \iota(U) \rightarrow \iota(\hat{U}), \quad \tilde{g} = \iota \circ g \circ \iota^{-1}: \iota(V) \rightarrow \iota(\hat{V}),$$

there exists  $A \in \text{PGL}(n+1, \mathbf{C})$  such that  $\tilde{f} = A|_{\iota(U)}$ . Thus  $f$  extends to the fractional linear map  $\iota^{-1} \circ A \circ \iota$ , which gives an automorphism of  $B_n$ .

We now give a simplified form of Alexander's proof [Al, p. 250] that the Jacobian matrix of the map  $f$  must be nonsingular at some point of  $U \cap \partial B_n$ . We begin by observing that  $f^{-1}(\partial B_n)$  is nowhere dense. Indeed, suppose on the contrary that  $f^{-1}(\partial B_n)$  contains a connected open set  $U_0$  and assume without loss of generality that  $f(z_0) = (1, 0, \dots, 0)$  for some point  $z_0 \in U_0$ . Then by the maximum principle,  $f_1 \equiv 1$  and hence  $f \equiv (1, 0, \dots, 0)$  on  $U_0$  and thus on  $U$ , contradicting the assumption that  $f$  is nonconstant. Now suppose on the contrary that the Jacobian determinant of  $f$  vanishes identically on  $U \cap \partial B_n$ . Since the zero of the Jacobian determinant is an analytic subvariety, the Jacobian determinant must vanish identically on  $U$ . As a consequence, the fibers of  $f$  contain no isolated points. Assume without loss of generality that  $(1, 0, \dots, 0) \in U$  and choose  $r < 1$  such that the spherical cap  $W := \{z \in B_n: \text{Re } z_1 > r\}$  is contained in  $U$ . Choose a point  $p \in W$  such that  $f(p) \notin \partial B_n$ . Let  $A$  be the connected component of  $f^{-1}(f(p)) \cap W$  that contains  $p$ ;  $A$  is an analytic subvariety of  $W$  of positive dimension. Furthermore  $\bar{A} \setminus A \subset \{z \in \mathbf{C}^n: \text{Re } z_1 = r\}$ . By the maximum principle (see for example [Gu, Theorem H2]) applied to the holomorphic function  $\varphi: A \rightarrow \mathbf{C}$  given by  $\varphi(z) = \exp z_1$ , we conclude that  $\varphi$  is constant and thus  $\bar{A} \setminus A = \emptyset$  so that  $A$  is a compact subvariety of  $W$  of positive dimension, which is impossible.  $\square$

#### REFERENCES

- [Al] ALEXANDER, H. Holomorphic mappings from the ball and polydisc. *Math. Ann.* 209 (1974), 249-256.  
 [Ar] ARTIN, E. *Geometric Algebra*. Interscience Publishers, New York, 1957.  
 [BB] BLASCHKE, W. and G. BOL. *Geometrie der Gewebe*. Springer, Berlin, 1938.  
 [Ca] CARTAN, E. Sur le groupe de la géométrie hypersphérique. *Comm. Math. Helv.* 4 (1932), 158-171.

- [CG] CHERN, S.-S. and P. GRIFFITHS. Abel's theorem and webs. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* 80 (1978), 13-110. Corrections and addenda. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* 83 (1981), 78-83.
- [CJ] CHERN, S.-S. and S. JI. Projective geometry and Riemann's mapping problem. Preprint, 1994.
- [Co] COXETER, H.S.M. *Projective Geometry*. University of Toronto Press, Toronto, 1974.
- [Fo] FORSTNERIČ, F. Proper holomorphic mappings: a survey. *Several Complex Variables: Proceedings of the Mittag-Leffler Institute, 1987-1988* (J.E. Fornæss, ed.). Princeton Univ. Press, Princeton, 1993, 297-363.
- [Go] GOLDBERG, V. *Theory of Multicodimensional  $(n + 1)$ -Webs*. Kluwer, Dordrecht, 1988.
- [Gu] GUNNING, R.C. *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables, Volume II: Local Theory*. Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 1990.
- [MY] MOK, N. and S.K. YEUNG. Geometric realizations of uniformization of conjugates of hermitian locally symmetric manifolds. *Complex Analysis and Geometry* (V. Ancona and A. Silva, eds.). Plenum Press, New York, 1993, 253-270.
- [MM] MOLZON, R. and K.P. MORTENSEN. The Schwarzian derivative for maps between manifolds with complex projective connections. Preprint, 1994.
- [Pe] PELLER, D. Proper holomorphic self-maps of the unit ball. *Math. Ann.* 190 (1971), 298-305. Correction. *Math. Ann.* 202 (1973), 135-136.
- [Po] POINCARÉ, H. Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme. *Rend. Circ. Mat. Palermo* (1907), 185-220.
- [Pr] PRENOWITZ, W. The characterization of plane collineations in terms of homologous families of lines. *Trans. Amer. Math. Soc.* 38 (1935), 564-599.
- [Ra] RADÓ, F. Non-injective collineations on some sets in Desarguesian projective planes and extension of non-commutative valuations. *Aequationes Math.* 4 (1970), 307-321.
- [Re] REIDEMEISTER, K. Topologische Fragen der Differentialgeometrie, V. *Math. Z.* 29 (1929), 427-435.
- [Ru] RUDIN, W. *Function Theory in the Unit Ball of  $C^n$* . Springer-Verlag, New York, 1980.
- [Ta] TANAKA, N. On pseudo-conformal geometry of hypersurfaces of the space of  $n$  complex variables. *J. Math. Soc. Japan* 14 (1962), 397-429.
- [We] WEBSTER, S. On the mapping problem for algebraic real hypersurfaces. *Inventiones Math.* 43 (1977), 53-68.

(Reçu le 5 août 1994)

Bernard Shiffman

Department of Mathematics  
Johns Hopkins University  
Baltimore, MD 21218  
U.S.A.

**Vide-leer-empty**