

## 4. ON THE LEAST VALUE OF $f$

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **40 (1994)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

4. ON THE LEAST VALUE OF  $f$ 

Let us consider again an integral polynomial  $f = u_1 + \cdots + u_N$ , with  $u_i \in M_n$  for all  $i$ . By Theorem 2 and the MacWilliams identity, the cardinality of  $f^{-1}(v)$  can be expressed in terms of the weight enumerator of the dual code  $K_f = L_f^\perp$ , for every  $v$  in  $\mathbf{Z}$ .

In this section, we will obtain another such formula for  $|f^{-1}(v)|$ , provided  $v$  is a lower bound for the range of  $f$ . These results could be applied to "count" the number of binary zeros of  $f$ , since  $v = 0$  is a lower bound for the range of  $f^2$ , and  $f^2$  has as many binary zeros as  $f$  does.

**THEOREM 4.** *Let  $f = u_1 + \cdots + u_N$  with  $u_i \in M_n$  for all  $i$ , and let  $K := L_f^\perp$  be the dual of the code  $L_f$  associated with  $f$ , with weight enumerator  $P_K(T)$ . Assume that  $v \in \mathbf{Z}$ ,  $v \equiv N \pmod{2}$ , is a lower bound for  $f$ , i.e.*

$$v \leq f(p)$$

for all  $p \in \{1, -1\}^n$ . Then we have

$$|f^{-1}(v)| = \frac{1}{2^\beta \cdot \alpha!} \cdot P_K^{(\alpha)}(-1)$$

where

1.  $\alpha = \alpha(v) = (N + v)/2$ ,
2.  $\beta = \beta(v) = (N - v)/2 - n$ , and
3.  $P_K^{(\alpha)}(-1)$  denotes the value at  $-1$  of the  $\alpha$ -th derivative of  $P_K(T)$ .

*Proof.* Let  $P_L(T) = \sum_{i=0}^N a_i T^i$  denote the weight enumerator of  $L = L_f$ , and let  $\gamma = \gamma(v) = (N - v)/2$ . By Corollary 3, we have  $\deg P_L \leq \gamma$  since  $f(p) \geq v$  for all  $p$ , and

$$(1) \quad |f^{-1}(v)| = 2^{n - \dim L} \cdot \alpha_\gamma.$$

Now, by the MacWilliams identity, the weight enumerator of  $K$  is given by

$$\begin{aligned} P_K(T) &= \frac{1}{|L|} \cdot \sum_{i=0}^{\gamma} a_i (1+T)^{N-i} (1-T)^i \\ &= \frac{1}{|L|} \cdot (1+T)^{N-\gamma} \cdot (\alpha_\gamma (1-T)^\gamma + (1+T)Q(T)), \end{aligned}$$

where  $Q(T)$  is some polynomial in  $T$ . Note that  $N - \gamma = \alpha = (N + v)/2$ .

To extract  $\alpha_\gamma$  from the above expression, we derive  $\alpha$  times, and evaluate at  $T = -1$ :

$$\begin{aligned} P_K^{(\alpha)}(-1) &= \frac{1}{|L|} \alpha! \alpha_\gamma 2^\gamma \\ &= \frac{1}{2^{\dim L}} \alpha! \alpha_\gamma 2^{N-\alpha}, \end{aligned}$$

and therefore

$$\alpha_\gamma = \frac{1}{2^{N-\alpha-\dim L} \alpha!} P_K^{(\alpha)}(-1).$$

Multiplying both sides by  $2^{n-\dim L}$ , and plugging in equation (1), we obtain the claimed formula for  $|f^{-1}(v)|$ .  $\square$

COROLLARY 5. *Let  $v_{min}$  be the least value assumed by  $f$  on binary points. Then*

$$\frac{1}{2} (N + v_{min}) = \text{the order of } -1 \text{ as a root of } P_K(T). \quad \square$$

### 5. THE NUMBER OF HADAMARD MATRICES OF ORDER $n$

A *Hadamard matrix* is a square matrix  $H$  of order  $n$  with entries in  $\{+1, -1\}$ , satisfying the relation

$$H \cdot H^T = nI_n.$$

( $H^T$  denotes the transpose of  $H$ , and  $I_n$  the identity matrix of order  $n$ .)

It is well known that the order of a Hadamard matrix can only be 1, 2 or a multiple of 4. Conversely, the existence of a Hadamard matrix of order  $n$  for every  $n \equiv 0 \pmod{4}$  is a longstanding conjecture, due to Jacques Hadamard [H]. The smallest open case currently occurs at  $n = 428$ . For a survey on Hadamard matrices, see [SY].

The theory exposed above yields a counting formula for Hadamard matrices of order  $n$ , in terms of the weight enumerator of a certain binary linear code of length  $\binom{n}{2}^2$ .

#### STEP 1. *Defining equations for Hadamard matrices.*

We represent binary matrices of order  $n$  as points  $p = (p_{i,j}) \in \{1, -1\}^{n^2}$ . Considering  $n^2$  variables  $\{x_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ , let

$$g_{k,l} = \sum_{r=1}^n x_{k,r} x_{l,r}.$$

If  $p = (p_{i,j})$  is a binary matrix, then  $g_{k,l}(p)$  is the dot product of the  $k$ -th and  $l$ -th rows of  $p$ . Thus, a binary matrix  $p$  is Hadamard if and only if

$$g_{k,l}(p) = 0 \quad \text{for all } 1 \leq k < l \leq n.$$