

# 4. Un système de coordonnées sur l'espace des réseaux

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **40 (1994)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

fait que la méthode de Minkowski donne pour chaque réseau deux bases opposées l'une de l'autre; les réseaux pour lesquels cette méthode fournit plus de deux bases (réseaux carrés et hexagonaux) sont projetés sur les deux points singuliers de la surface modulaire.

#### 4. UN SYSTÈME DE COORDONNÉES SUR L'ESPACE DES RÉSEAUX

Nous allons définir une autre méthode pour fixer des coordonnées, qui conduit à des calculs plus faciles. Etant donné un réseau dans  $\mathbf{R}^2$  (identifié à  $\mathbf{C}$  pour la commodité de notation), on définit pour chaque point  $x$  du réseau l'intervalle horizontal ouvert  $H_x = ]x - 1, x + 1[$ . La demi-droite verticale issue de  $x$  recoupe au moins un autre intervalle horizontal: en effet, soit le réseau contient un vecteur vertical, et cette demi-droite rencontre un autre point du réseau, soit il n'en contient pas, donc les deux vecteurs d'une base du réseau ont des abscisses rationnellement indépendantes, et il y a des points du réseau arbitrairement proches de la demi-droite.

Soit  $H_y$  le premier intervalle rencontré, et supposons que le point de rencontre soit à gauche de  $y$ . Ce point de rencontre peut s'écrire  $x + ic = y - a$ ; on appellera  $V_x$  l'intervalle vertical  $[x, x + ic[$  qu'il définit. On prolonge ensuite vers la droite tous les intervalles horizontaux jusqu'à rencontrer un intervalle vertical, ce qui est toujours possible par un raisonnement du même type que ci-dessus. Par symétrie, pour tout intervalle  $V_x$ , il existe un seul  $H_z$  dont le prolongement le coupe; on écrira  $z + b = x + id$  le point d'intersection. Il est clair que  $(a, c)$  et  $(-b, d)$  sont des vecteurs du réseau, et on vérifie sans peine qu'ils forment une base (cf. Fig. 4; en fait, cette construction donne un domaine fondamental pour le réseau formé de deux rectangles, l'un de base  $a$  et de hauteur  $d$ , l'autre de base  $b$  et de hauteur  $c$ ). On vérifie immédiatement que l'on a, par construction,  $0 < a < 1 \leq b$  et  $0 \leq d < c$ .

Si le premier point de rencontre avec  $H_y$  est à droite de  $y$ , on peut faire la construction symétrique, et on obtient une base  $(a, c)$ ,  $(-b, d)$  avec  $0 < b < 1 \leq a$  et  $0 \leq c < d$ .

Cette construction tombe en défaut dans deux cas:

— si le premier point d'intersection est égal à  $y$ ; dans ce cas le réseau contient un vecteur vertical, et on peut trouver une base de la forme  $(0, c)$ ,  $(-b, d)$  avec  $d < c$ ,  $b \geq 1$  (et aussi une base de la forme  $(a, c)$ ,  $(0, d)$  avec  $c < d$ ,  $a \geq 1$ );

— si le premier point d'intersection est contenu dans deux intervalles horizontaux, et dans ce cas le réseau contient un vecteur horizontal, et il y a une base de la forme  $(a, 0)$ ,  $(-b, d)$ , avec  $b < a < 1$ .

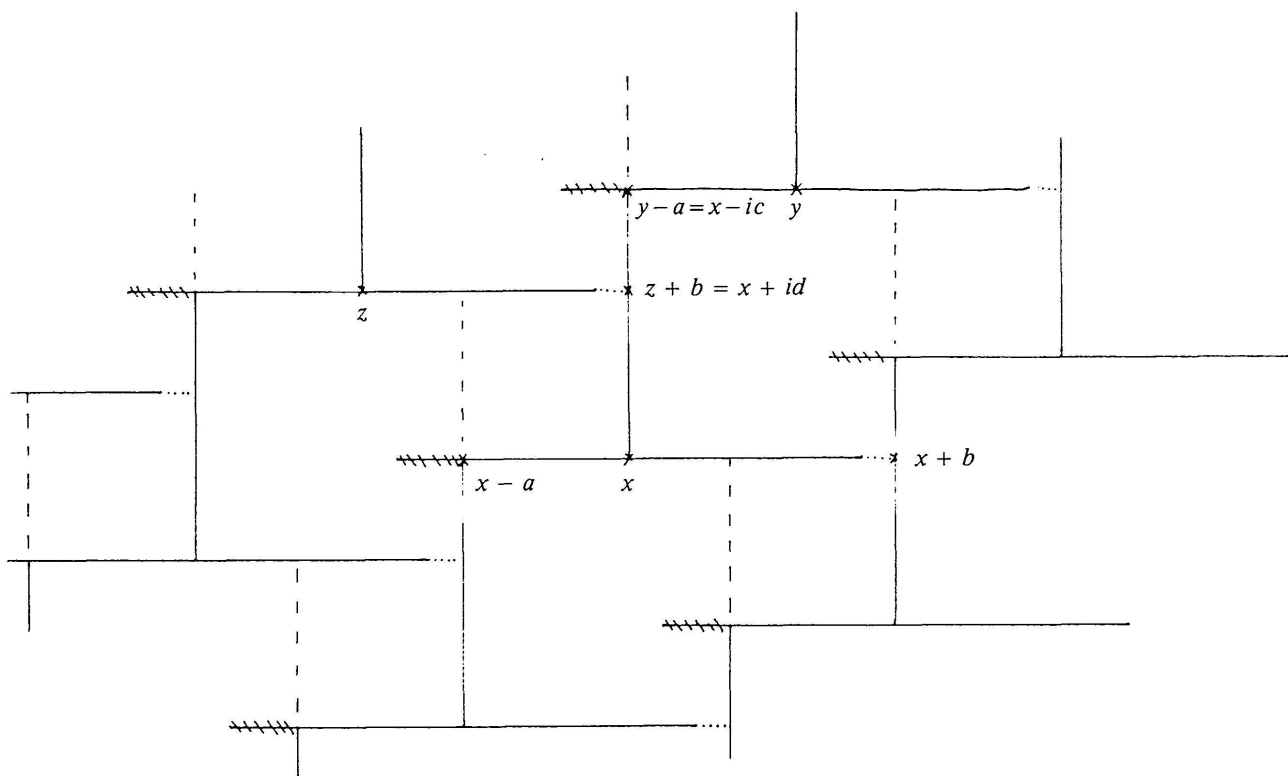


FIGURE 4

On peut remarquer que le premier cas correspond à des points dont l'orbite positive tend vers l'infini sur la surface modulaire, et le second cas à des points dont l'orbite négative tend vers l'infini; par exemple, une base de la forme  $(0, c), (-b, d)$  devient  $(0, ce^{-t/2}), (-be^{t/2}, de^{-t/2})$  sous l'action du flot géodésique, et l'application  $\phi$  définie ci-dessus lui fait correspondre le nombre complexe  $d/c + ie^t b/c$ , qui est contenu dans le domaine fondamental donné ci-dessus dès que  $d/c < 1/2$  et tend vers l'infini.

Pour résumer, nous avons montré qu'il existe un domaine fondamental pour l'action à gauche de  $SL(2, \mathbf{Z})$  sur  $SL(2, \mathbf{R})$  formé de matrices

$\begin{pmatrix} a & c \\ -b & d \end{pmatrix}$ , où  $(a, b, c, d)$  appartient à l'un des 3 ensembles suivants:

$$\Omega_0 = \{(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4 \mid ad + bc = 1, 0 < b < 1 \leq a, 0 \leq c < d\}$$

$$\Omega_1 = \{(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4 \mid ad + bc = 1, 0 \leq a < 1 \leq b, 0 \leq d < c\}$$

$$\Omega_2 = \{(a, b, 0, d) \in \mathbf{R}^4 \mid ad = 1, 0 < b < a < 1\}.$$

Le choix pour les inégalités strictes ou larges sur les bords de  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$  est assez arbitraire, puisqu'il y a des identifications entre les bords; en particulier le bord  $a = 0$  de  $\Omega_0$  s'identifie au bord  $b = 0$  de  $\Omega_1$ , l'identification étant donnée par la formule:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} \\ -a & \frac{1}{a} - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}.$$

Il peut être utile d'interpréter ces domaines de la façon suivante: tout réseau ne contenant pas de vecteur horizontal possède un unique domaine fondamental formé de deux rectangles alignés, le plus étroit étant de largeur inférieure à 1, le plus large étant plus haut que l'autre, et de largeur supérieure à 1 (cf. Fig. 4). On peut alors prendre comme coordonnées les deux largeurs et la plus petite des hauteurs; l'autre s'en déduit puisque l'aire du domaine fondamental est 1. On retrouve le fait, évident sur les équations, que les domaines  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$  sont de dimension 3;  $\Omega_0$  (resp.  $\Omega_1$ ) correspond au cas où c'est le rectangle de droite (resp. de gauche) qui est le plus grand. Quant à  $\Omega_2$ , il correspond aux réseaux contenant un vecteur horizontal petit; le plus petit rectangle est alors de hauteur nulle, et l'on ne peut plus assurer que la largeur du plus grand rectangle soit supérieure à 1.

## 5. LE CODAGE DU FLOT GÉODÉSIQUE

Dans ces coordonnées, le flot géodésique s'écrit simplement, du moins localement:

$$g_t(a, b, c, d) = (e^{t/2}a, e^{t/2}b, e^{-t/2}c, e^{-t/2}d).$$

Mais pour  $t$  assez grand, les deux premières coordonnées sont plus grandes que 1 (sauf dans le cas particulier où l'une d'entre elles est initialement nulle), et l'on traverse le bord du domaine fondamental; il faut alors faire une identification pour poursuivre l'orbite à partir d'une autre face. Pour décrire complètement le flot, il faut étudier cette identification.

Le domaine  $\Omega_0$  peut être paramétré par les 3 coordonnées  $a, b, c$ , puisque  $d = (1 - bc)/a$ , et plongé dans  $\mathbf{R}^3$  (cf. Fig. 5); il possède alors cinq bords, dont trois, donnés respectivement par les équations  $b = 0, c = 0, c = 1/(a + b)$ , sont formés de segments d'orbites du flot géodésique. Les deux derniers sont  $\Sigma_0$ , d'équation  $a = 1$ , sur lequel le flot est rentrant, et  $\Lambda_0$ , d'équation  $b = 1$ , sur lequel le flot est sortant. Le bord  $\Sigma_0$  peut être paramétré par  $(b, c)$ , avec  $b \in [0, 1[$  et  $c \in [0, 1/(b + 1)[$ ; on reconnaît le domaine  $\Sigma$  du paragraphe 1. Le bord  $\Lambda_0$  peut, lui, être paramétré par  $(a, c)$ , avec  $a > 1$  et  $c \in [0, 1/(a + 1)[$ .

On peut de même paramétrer  $\Omega_1$ , cette fois par  $(a, b, d)$ , et définir un bord rentrant  $\Sigma_1$ , paramétré par  $(a, d)$ , et un bord sortant  $\Lambda_1$ , paramétré par  $(b, d)$ .