0. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **40 (1994)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

L'Enseignement Mathématique, t. 40 (1994), p. 29-48

LE CODAGE DU FLOT GÉODÉSIQUE SUR LA SURFACE MODULAIRE

par Pierre ARNOUX

RÉSUMÉ. Nous donnons une preuve élémentaire et explicite du fait que le flot géodésique sur la surface modulaire (quotient du plan hyperbolique par l'action de $SL(2, \mathbf{Z})$) peut être codé en utilisant les fractions continues.

ABSTRACT. We give an elementary and explicit proof of the coding of the geodesic flow on the modular surface by continued fractions.

0. INTRODUCTION

Il est connu depuis longtemps, par un travail d'Artin [Ar] que le flot géodésique sur la surface modulaire peut être codé en utilisant les fractions continues; les articles récents d'Adler et Flatto et de Series ont fait une étude approfondie de ce codage ([AF], [Se]). Le but de cet article est de retrouver ce résultat de façon explicite et élémentaire en mettant un système de coordonnées adapté sur le fibré unitaire tangent de la surface modulaire.

De façon plus précise, on peut définir algébriquement le flot géodésique sur la surface modulaire comme l'action à droite, sur l'espace quotient $SL(2, \mathbf{Z})\backslash SL(2, \mathbf{R})$, du groupe des matrices diagonales positives de la forme $g_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$ (nous rappellerons plus bas la démonstration); mais on peut aussi voir $SL(2, \mathbf{Z})\backslash SL(2, \mathbf{R})$ comme l'espace des réseaux de $\mathbf{R}^2$ dont le domaine fondamental est de volume 1, et l'action de g_t consiste alors à écraser le réseau le long de l'axe des abscisses, en multipliant les abscisses par $e^{t/2}$ et les ordonnées par $e^{-t/2}$.

Pour la plupart des réseaux (ceux qui ne contiennent pas de vecteurs horizontaux ou verticaux), on peut trouver un domaine fondamental en forme de L, formé de deux rectangles accolés; l'action du flot dilate les bases de ces domaines fondamentaux et écrase leurs hauteurs, on peut alors revenir à un domaine de base plus petite en découpant le grand rectangle et en empilant les morceaux obtenus au-dessus du petit rectangle (cf. Fig. 1). Si l'on part de deux rectangles de bases respectives a et $b < a$, l'opération initiale est la division euclidienne de a par b, le quotient apparaît dans le nombre d'empilements au-dessus de b, puis on reprend l'opération avec b et le reste de la division, de manière identique à l'algorithme d'Euclide; mais ici l'algorithme ne termine jamais dès que les deux nombres sont incommensurables: il s'agit en fait de la version vectorielle de l'algorithme classique des fractions continues, et un calcul simple montre que si les quotients successifs obtenus sont $a_1, a_2, \ldots$, on a:

$$\frac{b}{a} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

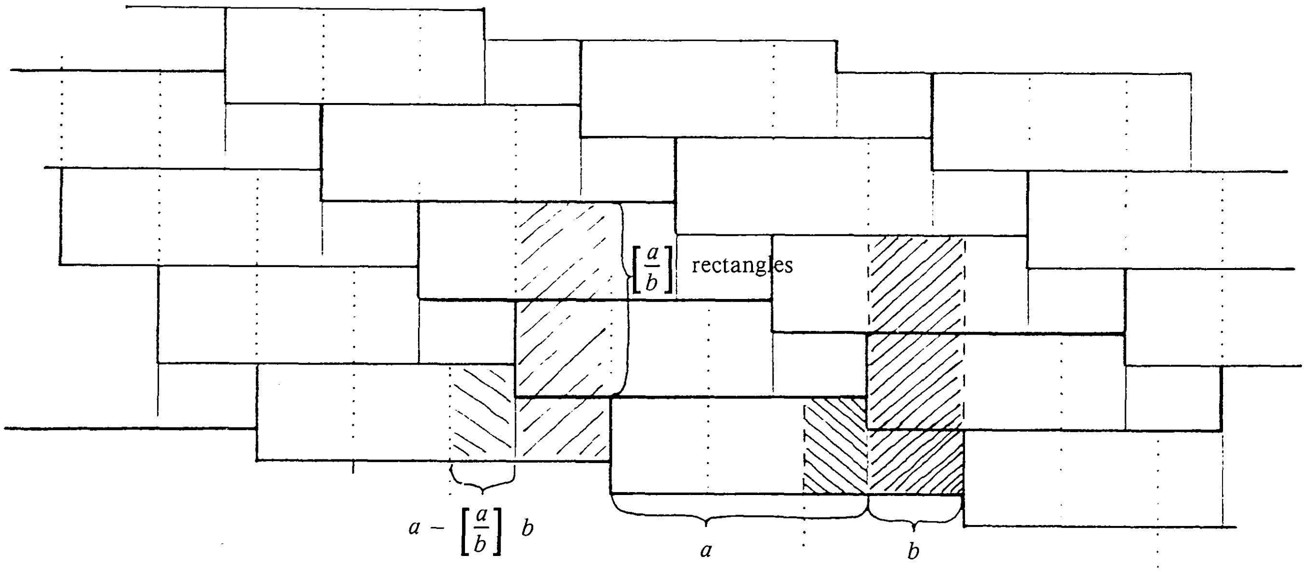

FIGURE 1

Il est clair que rien n'est changé si l'on multiplie a et b par la même constante, on peut donc à chaque étape normaliser à 1 le plus grand des deux nombres, et on passe ainsi de b à la partie fractionnaire de $1/b$, ce qui est la fonction associée à l'algorithme des fractions continues. Puisque le flot g_t dilate les longueurs, on peut utiliser un temps convenable du flot pour réaliser cette normalisation. La suite de cet article est consacrée à rendre rigoureux le raisonnement qui précède, et à en tirer quelques conséquences. Une façon beaucoup plus lourde d'énoncer les résultats qui précèdent consiste à voir l'espace $SL(2, \mathbf{Z}) \backslash SL(2, \mathbf{R})$ comme espace modulaire du tore, et le flot g_t comme flot de Teichmüller sur cet espace; ce point de vue, inutile ici, permet d'étudier le flot de Teichmüller sur l'espace modulaire d'une surface quelconque, en codant par des «rectangles cousus», généralisations de notre domaine fondamental en L. Cette étude a été faite par Veech [Ve2], et l'on peut considérer le présent article comme un exposé du cas le plus simple de cette construction ([Ve1], p. 1391, où on étudie aussi le flot horocyclique).

Dans la première section, nous rappelons ce que nous aurons besoin de savoir sur les fractions continues; dans la deuxième section, nous définissons le flot géodésique sur la surface modulaire, et nous en donnons un autre modèle dans la troisième section. Dans la quatrième, nous définissons de manière élémentaire un système de coordonnées global sur le fibré unitaire tangent à la surface modulaire, et dans la cinquième section, nous montrons que le flot géodésique admet une section sur laquelle l'application de premier retour est un revêtement double de l'extension naturelle de la transformation des fractions continues. Dans la sixième section, nous donnons, comme exemple d'application de cette méthode, une démonstration géométrique d'un théorème de Paul Lévy sur la croissance des dénominateurs des convergents pour presque tout nombre, en utilisant l'ergodicité du flot géodésique. Dans la dernière section, nous montrons comment, en changeant la section choisie pour le flot géodésique, on peut retrouver l'algorithme additif des fractions continues; on pourrait ainsi trouver, avec d'autres sections, une infinité d'algorithmes du même type.

1. La transformation des fractions continues

Il est classique que tout réel $x \in]0, 1[$ s'écrive de façon unique

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

où la suite (a_n) est une suite d'entiers strictement positifs, finie et se terminant par un entier strictement plus grand que 1 si x est rationnel, infinie sinon. On note habituellement cette égalité $x = [0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$; dans le cas particulier où la suite est périodique, on note $x = [0; \overline{a_1, \ldots, a_n}]$. Un calcul immédiat montre que $a_1 = [1/x]$, où $[t]$ est la partie entière de t, et que, si