2. Rappels et preuve de la proposition 4

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **40 (1994)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

2. Rappels et preuve de la proposition 4

Soit G un groupe localement compact, avec élément unité noté e. Dans la suite, on entend par «**représentation**» de G une «représentation unitaire continue dans un espace de Hilbert complexe». On désigne par 1_G la représentation unité de G dans l'espace de dimension 1.

Soit H un sous-groupe fermé de G. Pour toute représentation π de H, on désigne par $Ind_H^G(\pi)$ la représentation de G induite de π. (Voir ci-dessous les rappels dans la preuve du lemme 4.) Lorsque $\pi = 1_H$, on obtient la représentation quasi-régulière de G associée à l'espace homogène $H \backslash G$; si de plus $H = \{e\}$, on obtient la représentation régulière droite de G, notée ρ_G. Si π et π' sont deux représentations de G, la notation $\pi \prec \pi'$ (respectivement $\pi \sim \pi'$) indique que la représentation π est faiblement contenue dans π' (resp. est faiblement équivalente à π'); pour ces notions, voir [Dix].

Le groupe G est dit **moyennable** si $1_G \prec \rho_G$; il y a de nombreuses autres définitions équivalentes (voir par exemple [Gre] et [Eym]). Un groupe de Lie réel connexe semi-simple est moyennable si et seulement s'il est compact: c'est un résultat qui remonte à Furstenberg [Fur].

Considérons plus particulièrement le cas d'un groupe discret, noté Γ. Si X est une partie de Γ invariante par conjugaison, on introduit l'espace $l^2(X)$ des fonctions $\Gamma \to \mathbf{C}$ de carré sommable à supports dans X et la représentation $\alpha_{\Gamma,X}$ de Γ dans $l^2(X)$ définie par

$$(\alpha_{\Gamma,X}(\gamma)\xi)(x) = \xi(\gamma^{-1}x\gamma)$$

pour tous $\gamma \in \Gamma$, $\xi \in l^2(X)$ et $x \in X$. Lorsque $X = \Gamma - \{e\}$, on écrit simplement α_Γ. Le groupe Γ est dit **intérieurement moyennable** si $1_\Gamma \prec \alpha_\Gamma$. Il y a plusieurs autres définitions de cette notion [BeH], mais il faut de plus noter que certains auteurs utilisent les mêmes mots pour une notion *distincte* [Pat, page 84].

Rappelons deux des conditions standard suffisantes pour qu'un groupe Γ soit intérieurement moyennable. La première est qu'il possède une classe de conjugaison finie et distincte de $\{e\}$, c'est-à-dire que α_Γ contienne la représentation unité 1_Γ au sens fort. La seconde est que Γ soit moyennable et non réduit à $\{e\}$. (L'argument usuel apparaît dans [Gre, Lemma 1.1.3]; une variante apparaît ci-dessous après le lemme 4.)

Il existe par ailleurs des groupes intérieurement moyennables non moyennables: c'est le cas d'un produit direct $\Gamma_0 \times \Gamma_1$ lorsque Γ_0 est non moyennable et lorsque Γ_1 est moyennable non réduit à un élément.

Toutefois, de nombreux «exemples naturels» de groupes non moyennables sont aussi non intérieurement moyennables, et les résultats de la présente note fournissent des illustrations supplémentaires de ce fait.

Soit Γ_0 un sous-groupe d'indice fini d'un groupe Γ intérieurement moyennable. Il se peut que Γ_0 ne soit *pas* intérieurement moyennable (exemple: $\Gamma = \Gamma_0 \times \Gamma_1$ avec Γ_1 fini non réduit à un élément). Toutefois, lorsque Γ est de plus cci (ou, en toutes lettres, à classes de conjugaison infinies), on a les lemmes suivants, desquels découle la moyennabilité intérieure de Γ_0 (proposition 4).

Introduisons d'abord quelques notations. On désigne par $l^1(\Gamma)$ l'algèbre de convolution des fonctions sommables de Γ dans $\mathbf{C}$, qui est une algèbre de Banach pour la norme définie par $\| \xi \|_1 = \sum_{\gamma \in \Gamma} | \xi(\gamma) |$. Comme Γ est discret, tout élément $\xi \in l^1(\Gamma)$ possède aussi des normes $\| \xi \|_2 = (\sum_{\gamma \in \Gamma} | \xi(\gamma) |^2)^{1/2}$ et $\| \xi \|_\infty = \sup_{\gamma \in \Gamma} | \xi(\gamma) |$ qui sont finies. Pour $\xi \in l^1(\Gamma)$ et $\gamma \in \Gamma$, on définit l'adjoint $\xi^* \in l^1(\Gamma)$ et l'opérateur $\alpha(\gamma)$ sur $l^1(\Gamma)$ par

$$\xi^*(x) = \overline{\xi(x^{-1})}$$
$$(\alpha(\gamma)\xi)(x) = \xi(\gamma^{-1} x \gamma)$$

pour tout $x \in \Gamma$. On désigne par $l^1(\Gamma)_{0,1}^+$ le convexe de $l^1(\Gamma)$ formé des fonctions ξ à valeurs positives, telles que $\xi(e) = 0$, et de norme $\| \xi \|_1 = 1$.

La moyennabilité intérieure de Γ se traduit [BeH] par l'existence d'une suite $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ dans $l^1(\Gamma)_{0,1}^+$ qui est asymptotiquement invariante au sens où

$$\lim_{n \to \infty} \| \alpha(\gamma)\xi_n - \xi_n \|_1 = 0$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$.

LEMME 1. *Si Γ est intérieurement moyennable et cci, il existe une suite asymptotiquement invariante $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ dans $l^1(\Gamma)_{0,1}^+$ ayant les propriétés suivantes:*

(i) ξ_n *est à support fini pour tout* $n \geqslant 1$,

(ii) $\lim_{n \to \infty} \| \xi_n \|_\infty = 0$,

(iii) $\lim_{n \to \infty} \| \xi_n \|_2 = 0$.

Preuve. Soit $(\xi_k'')_{k \geqslant 1}$ une suite asymptotiquement invariante de $l^1(\Gamma)_{0,1}^+$.

Premier pas. Montrons d'abord que, pour tout $x \in \Gamma$ on a $\lim_{k \to \infty} \xi_k''(x) = 0$.

Pour cela, choisissons un entier $c \geqslant 2$. On peut trouver $\gamma_1, \ldots, \gamma_c \in \Gamma$ tels que les éléments $\gamma_1^{-1} x \gamma_1, \ldots, \gamma_c^{-1} x \gamma_c$ sont distincts deux à deux. Il existe aussi un entier k_0 assez grand pour que $\| \alpha(\gamma_j) \xi_k'' - \xi_k'' \|_1 \leqslant c^{-1}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, c\}$ et pour tout $k \geqslant k_0$. Par suite $\xi_k''(\gamma_j^{-1} x \gamma_j) \geqslant \xi_k''(x) - c^{-1}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, c\}$, donc $1 = \| \xi_k'' \|_1 \geqslant c \xi_k''(x) - 1$ et $\xi_k''(x) \leqslant 2c^{-1}$ pour tout $k \geqslant k_0$. L'entier c étant arbitraire, la suite $(\xi_k''(x))_{k \geqslant 1}$ tend bien vers 0.

Deuxième pas. Le sous-ensemble de $l^1(\Gamma)_{0,1}^+$ formé des fonctions à supports finis est dense dans $l^1(\Gamma)_{0,1}^+$. On ne restreint donc pas la généralité de ce qui suit en supposant *a priori* les fonctions ξ_k'' à supports finis. Soit alors $(k_n)_{n \geqslant 1}$ une suite strictement croissante d'entiers strictement positifs. Pour tout $n \geqslant 1$ on pose

$$S_n = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant n} \text{support}\,(\xi_{k_j}'') \subset \Gamma$$

(c'est une partie finie de Γ) et on note χ_n la fonction caractéristique de S_n.

Montrons que, pour un choix convenable de $(k_n)_{n \geqslant 1}$, on peut définir une suite asymptotique invariante $(\xi_n')_{n \geqslant 1}$ de $l^1(\Gamma)_{0,1}^+$ de n-ième terme

$$\xi_n' = (\xi_{k_n}'' - \xi_{k_n}'' \chi_{n-1}) \| \xi_{k_n}'' - \xi_{k_n}'' \chi_{n-1} \|_1^{-1}$$

(avec $\chi_0 = 0$) de telle sorte que les supports des ξ_n' sont alors finis et *disjoints deux à deux.*

On pose $k_1 = 1$, donc $\xi_1' = \xi_1''$, puis on procède par récurrence sur n en supposant $\xi_1', \ldots, \xi_{n-1}'$ déjà définis. Par le premier pas, on a

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{x \in S_{n-1}} \xi_k''(x) = 0 .$$

On peut choisir $k_n > k_{n-1}$ tel que

$$\sum_{x \in S_{n-1}} \xi_{k_n}''(x) \leqslant \frac{1}{n},$$

c'est-à-dire tel que $\| \xi_{k_n}'' - \xi_{k_n}'' \chi_{n-1} \|_1 \geqslant \frac{n-1}{n}$. La définition ci-dessus de ξ_n' a donc un sens, et la suite $(\xi_n')_{n \geqslant 1}$ a évidemment les propriétés annoncées.

Troisième pas. Soit $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ la suite définie à la Cesàro par

$$\xi_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j' .$$

Cette suite satisfait évidemment les conditions (i) et (ii) du lemme (on a même $\| \xi_n \|_\infty \leqslant \frac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$). Comme $\| \xi \|_2^2 \leqslant \| \xi \|_1 \| \xi \|_\infty$ pour tout $\xi \in l^1(\Gamma)$, elle satisfait aussi la condition (iii). □

LEMME 2. *Soit* Γ *un groupe intérieurement moyennable et cci, et soit* $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ *une suite asymptotiquement invariante de* $l^1(\Gamma)^+_{0,1}$ *possédant les propriétés du lemme 1. Soit* $(\eta_n)_{n \geqslant 1}$ *la suite définie par* $\eta_n = \xi_n^* \star \xi_n$ *et soit* Γ_0 *un sous-groupe de* Γ *d'indice* $f = [\Gamma : \Gamma_0]$ *fini. Alors*

$$\liminf_{n \to \infty} \sum_{\gamma \in \Gamma_0 - \{e\}} \eta_n(\gamma) \geqslant \frac{1}{f}$$

Preuve. Désignons par $\chi_s : \Gamma \to \{0, 1\}$ la fonction caractéristique d'une classe à gauche $s \in \Gamma/\Gamma_0$. Posons

$$T = \{(x, y) \in \Gamma \times \Gamma \mid x^{-1}y \in \Gamma_0\} = \coprod_{s \in \Gamma/\Gamma_0} (s\Gamma_0 \times s\Gamma_0)$$

où $\coprod$ désigne une réunion disjointe. Pour tout $n \geqslant 1$ on note η_n' la restriction de η_n à Γ_0. On a

$$\begin{aligned} \|\eta_n'\|_1 = \sum_{(x,y) \in T} \xi_n(x)\xi_n(y) &= \sum_{s \in \Gamma/\Gamma_0} \sum_{x \in \Gamma, y \in \Gamma} (\xi_n\chi_s)(x)(\xi_n\chi_s)(y) \\ &= \sum_{s \in \Gamma/\Gamma_0} (\|\xi_n\chi_s\|_1)^2 \end{aligned}$$

ainsi que

$$1 = \|\xi_n\|_1 = \sum_{s \in \Gamma/\Gamma_0} \|\xi_n\chi_s\|_1 \leqslant \left(\sum_{s \in \Gamma/\Gamma_0} (\|\xi_n\chi_s\|_1)^2\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{f} = (\|\eta_n'\|_1 f)^{\frac{1}{2}}$$

(on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la somme sur Γ/Γ_0). Par suite

$$\|\eta_n'\|_1 \geqslant \frac{1}{f}$$

pour tout $n \geqslant 1$. Par ailleurs, il résulte du lemme 1 que $\eta_n(e) = \|\xi_n\|_2^2$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. La conclusion du lemme 2 en résulte. □

Notons que les lemmes 1 et 2 ci-dessus sont des raffinements des lemmes 3 et 4 de [GiH].

Dans la situation du lemme 2, posons de plus

$$\zeta_n = \eta_n - \eta_n(e)\delta$$

pour tout $n \geqslant 1$, où δ désigne la fonction caractéristique de $\{e\}$ dans Γ. Notons ζ_n' la restriction de ζ_n à Γ_0 et $\|\zeta_n'\|$ sa norme dans $l^1(\Gamma_0)$. Le lemme 2 se reformule en les inégalités $\| \zeta_n' \| \geqslant f^{-1}$, et on peut définir une suite asymptotiquement invariante $(\zeta_n' \| \zeta_n' \|^{-1})_{n \geqslant 1}$ dans $l^1(\Gamma_0)^+_{0,1}$. Il en résulte que Γ_0 est intérieurement moyennable, ce qui achève la preuve de la proposition 4.

3. Lemmes préliminaires

Soit d'abord Γ un groupe discret. Notons *Conj'*(Γ) l'ensemble des classes de conjugaison de Γ distinctes de $\{e\}$. Avec les notations du début du chapitre précédent, on a

$$\alpha_\Gamma = \bigoplus_{C \in Conj'(\Gamma)} \alpha_{\Gamma, C}$$

où $\oplus$ désigne une somme orthogonale. Pour tout $C \in Conj'(\Gamma)$, choisissons de plus un élément $\gamma_C \in C$; notons $\mathscr{C}_\Gamma = \{\gamma_C\}_{C \in Conj'(\Gamma)}$ le sous-ensemble de Γ ainsi spécifié. Pour tout $C \in Conj'(\Gamma)$, la classe C s'identifie à l'espace homogène $Z(\gamma_C, \Gamma) \backslash \Gamma$ et on a

$$\alpha_{\Gamma, C} \approx Ind^{\Gamma}_{Z(\gamma_C, \Gamma)} (1_{Z(\gamma_C, \Gamma)})$$

où $Z(\gamma_C, \Gamma)$ désigne le centralisateur de γ_C dans Γ et où $\approx$ indique l'équivalence unitaire des représentations. On a donc

$$\alpha_\Gamma \approx \bigoplus_{\gamma \in \mathscr{C}_\Gamma} Ind^{\Gamma}_{Z(\gamma, \Gamma)} (1_{Z(\gamma, \Gamma)}) .$$

Lemme 3. *Soit Γ un réseau dans un groupe localement compact G. Si Γ est intérieurement moyennable, on a*

$$1_G \prec \bigoplus_{\gamma \in \mathscr{C}_\Gamma} Ind^{G}_{Z(\gamma, G)} (1_{Z(\gamma, G)}) .$$

Preuve. Par hypothèse, on a

$$1_\Gamma \prec \bigoplus_{\gamma \in \mathscr{C}_\Gamma} Ind^{\Gamma}_{Z(\gamma, \Gamma)} (1_{Z(\gamma, \Gamma)}) .$$

En induisant à G on obtient

$$Ind^G_\Gamma (1_\Gamma) \prec \bigoplus_{\gamma \in \mathscr{C}_\Gamma} Ind^{G}_{Z(\gamma, \Gamma)} (1_{Z(\gamma, \Gamma)}) .$$

Par ailleurs, 1_G est une sous-représentation de $Ind^G_\Gamma(1_\Gamma)$, car Γ est un réseau dans G. La conclusion résulte donc de l'assertion (ii) du lemme suivant. □

Le lemme qui suit est essentiellement le «principe de majoration de Herz» [EyL].