1. Introduction

L'Enseignement Mathématique, t. 40 (1994), p. 291-311

LES RÉSEAUX DANS LES GROUPES SEMI-SIMPLES NE SONT PAS INTÉRIEUREMENT MOYENNABLES

par Pierre DE LA HARPE et Georges SKANDALIS

ABSTRACT. We show that any lattice in a semi-simple connected real Lie group G with trivial center and without compact factor is a group which is not inner amenable. The results carry over to lattices in groups defined over local fields of characteristic zero, and to some other cases.

RÉSUMÉ. On montre que tout réseau dans un groupe de Lie réel G connexe semi-simple de centre trivial et sans facteur compact est un groupe non intérieurement moyennable. Les résultats s'étendent aux réseaux dans les groupes définis sur des corps locaux de caractéristique nulle, ainsi qu'à quelques autres cas.

1. INTRODUCTION

Le premier objet de ce travail est d'obtenir le résultat suivant. Rappelons qu'un *réseau* d'un groupe localement compact G est un sous-groupe discret Γ de G tel qu'il existe sur $\Gamma \backslash G$ une mesure de probabilité G-invariante. La notion de moyennabilité intérieure est rappelée au chapitre 2 ci-dessous.

PROPOSITION 1. *Soit G un groupe de Lie réel connexe, semi-simple, de centre réduit à un élément, et sans facteur compact. Alors tout réseau Γ de G est non intérieurement moyennable.*

Notons que ce résultat était déjà connu quand G est de plus supposé simple: lorsque G est de rang réel 1, voir [HaJ] pour le cas où Γ est sans torsion et [GiH] pour le cas général; lorsque G a la propriété (T) de Kazhdan, voir [BeH].

Keywords: Groupes intérieurement moyennables, réseaux, groupes semi-simples.
1980 Mathematics subject classifications: 22 D 10, 22 E 40.

La proposition 1 est une conséquence presque immédiate du résultat plus technique ci-dessous. Dans un groupe G, on note e l'élément neutre et $Z(x, G)$ le centralisateur d'un élément $x \in G$.

THÉORÈME A. *On considère des groupes localement compacts* G_H, G_T *et un réseau*

$$\Gamma \subset G = G_H \times G_T$$

ayant les propriétés suivantes.

(a) Le groupe G_H *agit par homéomorphismes sur un espace compact* Ω *et il n'existe aucune mesure de probabilité* G_H*-invariante sur* Ω. *De plus, pour tout* $x \in G_H$ *tel que* $x^{\mathbf{Z}}$ *ne soit pas relativement compact dans* G_H, *il existe une mesure de probabilité* $Z(x, G_H)$*-invariante sur* Ω.

(b) Le groupe G_T *possède la propriété (T) de Kazhdan. De plus, pour tout* $x \in G_T - \{e\}$, *le centralisateur* $Z(x, G_T)$ *n'est pas de covolume fini dans* G_T.

(c) Le groupe $\Gamma \cap (G_H \times \{e\})$ *est sans torsion.*

Alors Γ *n'est pas intérieurement moyennable.*

Pour appliquer ce théorème, considérons un ensemble fini non vide A ainsi que, pour tout $\alpha \in A$, un corps local $\mathbf{k}_\alpha$ et un groupe algébrique affine $\mathbf{G}_\alpha$ défini sur $\mathbf{k}_\alpha$; on suppose $\mathbf{G}_\alpha$ connexe, simple, $\mathbf{k}_\alpha$-isotrope, et de centre réduit à $\{e\}$. On note G_α le groupe des points $\mathbf{k}_\alpha$-rationnels de $\mathbf{G}_\alpha$, qui est non compact [Mar, §I.2.3], et G le produit direct $\prod_{\alpha \in A} G_\alpha$.

On peut décomposer G en le produit G_H des facteurs de rang déployé un (l'indice H indique que ces facteurs, au moins lorsque $\mathbf{k}_\alpha = \mathbf{R}$, agissent sur des espaces hyperboliques) fois le produit G_T des autres facteurs (l'indice T indique que G_T possède la propriété de Kazhdan). Les hypothèses du théorème A sont alors satisfaites (voir le chapitre 4 ci-dessous) et on obtient le résultat suivant.

PROPOSITION 2. *Soit* G *comme ci-dessus et soit* Γ_0 *un réseau de* G *qui est sans torsion. Alors* Γ_0 *est non intérieurement moyennable.*

Si $\mathbf{k}_\alpha = \mathbf{R}$ pour tout $\alpha \in A$, les composantes connexes des groupes G de la proposition 2 coïncident précisément avec les groupes G de la proposition 1. (Voir par exemple [Zim, 3.1.6].)

On trouve au chapitre 4 une généralisation de la proposition 2.

COROLLAIRE. *Soit G comme à la proposition 2; on suppose de plus les corps $\mathbf{k}_\alpha$ de caractéristique nulle. Alors tout réseau Γ de G est non intérieurement moyennable.*

Preuve. Les hypothèses du corollaire impliquent que Γ est de type fini; voir [Mar, Theorem IX.3.2.i et Remark (i) du n° IX.1.2]; si $\mathbf{k}_\alpha = \mathbf{R}$ pour tout $\alpha \in A$, voir aussi [Ra1, Remarks 6.18 et 13.21]. Or, en caractéristique nulle, le groupe linéaire de type fini Γ possède nécessairement un sous-groupe Γ_0 d'indice fini qui est sans torsion [Sel]. Il en résulte que Γ_0 n'est pas intérieurement moyennable (proposition 2), et Γ non plus (proposition 4 ou [GiH]). $\square$

En présence de corps de caractéristiques non nulles, notons d'abord qu'il existe des réseaux qui ne sont pas de type fini: c'est par exemple le cas de $\Gamma = SL(2, \mathbf{F}_q[t])$ dans $G = SL(2, \mathbf{F}_q((t)))$, et plus généralement de tout réseau *non cocompact* dans un groupe G de rang un sur un corps $\mathbf{F}_q((t))$ (voir [Lu1] et [Lu2]). Notons aussi que le «lemme de Selberg» invoqué dans la preuve du corollaire ne s'applique pas: par exemple, pour tout sous-groupe Γ_0 d'indice fini dans $\Gamma = SL(2, \mathbf{F}_q[t])$, le volume de G/Γ_0 est égal à une série infinie convergente de la forme

$$\mu(G/\Gamma_0) = \sum_{x \in F} \frac{1}{\mathrm{cardinal}(\Gamma_x)} < \infty$$

où les Γ_x sont certains sous-groupes finis de Γ_0 [Ser, II.1.5], de sorte que Γ_0 a toujours de la torsion.

Toutefois, étant donné un réseau Γ d'un groupe $G = \prod_{\alpha \in A} G_\alpha$ comme à la proposition 2, on peut encore montrer que Γ est non intérieurement moyennable dans certains cas, comme (1) et (2) ci-dessous. Rappelons d'abord que Γ est produit direct de réseaux irréductibles, et qu'un tel produit est non intérieurement moyennable si et seulement s'il en est de même de chaque facteur [BeH, Corollaire 3]. Il résulte donc de [Mar, Corollary IX.4.4] qu'on ne restreint pas la généralité de ce qui suit en supposant que les corps $\mathbf{k}_\alpha$ ont tous la même caractéristique; vu le corollaire précédent, on suppose cette caractéristique non nulle. Ceci dit, on a les résultats suivants.

(1) Si tous les G_α sont de rang déployé au moins 2, alors le réseau Γ a la propriété (T) de Kazhdan, et n'est donc pas intérieurement moyennable.

(2) Si $A = \{\alpha\}$ est réduit à un élément, si $\mathbf{k}_\alpha = \mathbf{F}_q((t))$ et si G_α est de rang déployé un, alors le réseau Γ possède un sous-groupe Γ_0 d'indice fini qui est un produit libre non banal (voir [Lu1] et [Lu2]), donc Γ_0 n'est pas intérieurement moyennable [BeH], et Γ non plus (proposition 4 ci-après).

Mais nous n'avons pas su éliminer en toute généralité l'hypothèse sur les caractéristiques dans le corollaire ci-dessus.

Si G est comme dans la proposition 2 ou son corollaire, les méthodes utilisées pour montrer la non moyennabilité intérieure de Γ s'appliquent à d'autres sous-groupes qu'à des réseaux. Pour illustrer ces généralisations sans trop alourdir notre rédaction, nous montrons au chapitre 4 un théorème B, qui est un raffinement du théorème A ci-dessus, et qui implique le résultat suivant. Sur un corps local $\mathbf{k}$, on considère toujours la valeur absolue $x \mapsto |x|$ associant à x le module (au sens de la théorie de la mesure de Haar) de l'automorphisme $y \mapsto xy$ du groupe additif de $\mathbf{k}$. Dans la proposition qui suit, on ne fait aucune hypothèse sur la caractéristique de $\mathbf{k}$.

PROPOSITION 3. *On considère un entier* $d \geqslant 2$, *un corps local* $\mathbf{k}$ *et un sous-groupe* S *du groupe* $G = \mathrm{PGL}(d, \mathbf{k})$. *De plus,*

si $d = 2$ *on suppose que* S *ne contient pas de sous-groupe résoluble d'indice fini, et qu'il existe dans* S *un élément représenté par une matrice de valeurs propres* $\lambda_\alpha, \lambda_\omega$ *telles que* $|\lambda_\alpha| < |\lambda_\omega|$,

si $d \geqslant 3$ *on suppose que* S *contient un réseau de* G.

Alors S *est non intérieurement moyennable.*

Par exemple, pour tout $d \geqslant 2$, *le groupe* $PSL(d, \mathbf{Q})$ *n'est pas intérieurement moyennable.*

Si Γ [respectivement S] est un groupe comme dans l'un des résultats précédents, la non moyennabilité intérieure de ce groupe implique que son *algèbre de von Neumann* est un *facteur plein.* (Ceci grâce à un résultat dû à Effros [Efr]; voir aussi l'observation (1) à la fin du §1 de [BeH].)

Pour montrer ces résultats, on utilise des propriétés élémentaires (relatives à la contenance faible) de l'induction des représentations unitaires. Avant la preuve, nous rappelons quelques-unes des notions en jeu. On utilise enfin (dans la preuve du corollaire) le résultat suivant. Il généralise le théorème 1 de [GiH] en ceci que Γ n'est pas nécessairement supposé être de type fini.

PROPOSITION 4. *Soient* Γ *un groupe et* Γ_0 *un sous-groupe d'indice fini. On suppose que* Γ *est intérieurement moyennable et cci (c'est-à-dire que ses classes de conjugaison autres que* $\{e\}$ *sont toutes infinies). Alors* Γ_0 *est aussi intérieurement moyennable.*