# III. Applications polynomiales laissant invariant Caractérisation des  tels que $Q_\sigma = 1$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

On sait par ailleurs (proposition I.9) que $\lambda$ divise $P_{\sigma(ab)} - P_{a^\varepsilon b^\eta}$. Comme $P_{\sigma(ab)} = z$ et $P_{a^{-1}b} = P_{ab^{-1}} = xy - z$ on a $\varepsilon = \eta$. Quitte à composer avec l'involution $(a^{-1}, b^{-1})$, on peut supposer que l'on a $\varepsilon = \eta = 1$.

Supposons que les mots $uau^{-1}$ et $vbv^{-1}$ soient réduits. Si $u = v = e$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, supposons que $|u| \geqslant |v|$ (où $|u|$ désigne la longueur de $u$). On a alors $u = u'b^n$ avec $n \neq 0$, la dernière lettre de $u'$ étant $a$, si $|u'| > 0$. Dans ces conditions on a

$$\sigma(ab) = u'b^n ab^{-n} u'^{-1} vbv^{-1}$$

d'où

$$z = P_{(ab^{-n}u'^{-1}vbv^{-1}u'b^n)} .$$

Utilisant une nouvelle fois le lemme 3, on obtient que $u'^{-1}v = b^k$. L'irréductibilité de $vbv^{-1}$ implique alors $u' = v$. Ceci montre que $\sigma$ est un automorphisme intérieur.

## III. Applications polynomiales laissant $\lambda$ invariant<br>Caractérisation des $\sigma$ tels que $Q_\sigma = 1$

On désigne par $R$ un domaine d'intégrité de caractéristique nulle et par $\mathscr{A}$ l'ensemble des $\psi \in (R[x, y, z])^3$ tels que $\lambda \circ \psi = \lambda$.

L'ensemble $\mathscr{A}$ contient $\{\Phi_\sigma ; \sigma \in \operatorname{aut} F\}$. Il sera commode de considérer les éléments suivants de $\operatorname{aut} F$:

$$\alpha = (b, a) , \quad \beta = (a, b^{-1}) , \quad \gamma = (ab, b^{-1}) .$$

Les $\Phi$ correspondants sont

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(x, y, z) &= (y, x, z) \\ \Phi_\beta(x, y, z) &= (x, y, xy - z) \\ \Phi_\gamma(x, y, z) &= (z, y, x) . \end{aligned}$$

On considérera aussi les applications polynomiales suivantes:

$$\rho(x, y, z) = (-x, -y, z)$$

et

$$\theta(x, y, z) = (-x, y, -z) .$$

Ces applications polynomiales sont également dans $\mathscr{A}$.

Nous allons montrer que $\mathscr{A}$ est engendré par $\Phi_\alpha, \Phi_\beta, \Phi_\gamma, \rho$ et $\theta$.

LEMME 1. *Si* $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ *appartient à* $\mathscr{A}$, *alors on a, pour* $i = 1, 2, 3$, $d^0\psi_i \geqslant 1$.

*Démonstration.* Si, par exemple, $\psi_3$ était constant, égal à $c$, on aurait

$$\psi_1^2 + \psi_2^2 - c\psi_1\psi_2 = x^2 + y^2 + z^2 - xyz - c^2 .$$

Or, le premier membre de cette expression est réductible dans un corps, extension convenable de $R$, alors que le second membre ne l'est pas.

Notons $\deg \psi$ la somme $d^0\psi_1 + d^0\psi_2 + d^0\psi_3$ et posons

$$\mathscr{L} = \{\psi \in \mathscr{A}; \quad \deg \psi = 3\} .$$

LEMME 2. $\mathscr{L}$ *est le groupe engendré par* $\Phi_\alpha, \Phi_\gamma$ *et* $\rho$.

*Démonstration.* Appelons les variables $x_1, x_2, x_3$ au lieu de $x, y, z$. Soit $\psi \in L$. On a $\psi_j(x) = l_j + u_j$ où $l_j$ est un polynôme homogène de degré 1 et $u_j \in R$. On a

$$\sum_{j=1}^{3} (l_j + u_j)^2 - (l_1 + u_1)(l_2 + u_2)(l_3 + u_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2x_3 .$$

L'identification des termes de degré 3 donne $l_j = v_j x_{\tau(j)}$ où $v_j \in R$, et $\tau \in \mathscr{S}_3$ et $v_1v_2v_3 = 1$. L'identification des termes quadratiques donne alors $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, $v_1^2 = v_2^2 = v_3^2 = 1$.

Il est dès lors facile de se convaincre que $\psi$ est dans le groupe engendré par $\Phi_\alpha$, $\Phi_\delta$ et $\rho$.

LEMME 3. *Soit* $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \in \mathscr{A}$ *tel que* $\deg \psi > 3$. *Alors, il existe* $\sigma \in \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$, *le groupe engendré par* $\alpha, \beta$ *et* $\gamma$, *tel que* $\deg(\Phi_\sigma \circ \psi) < \deg \psi$.

*Démonstration.* Puisque $\Phi_\alpha$ et $\Phi_\gamma$ sont des transpositions distinctes de deux composantes, quitte à remplacer $\psi$ par $\Phi_\sigma \circ \psi$, avec $\sigma \in \langle \alpha, \gamma \rangle$, on peut supposer que $d^0\psi_3 \geqslant d^0\psi_2 \geqslant d^0\psi_1 \geqslant 1$.

Puisque $\deg \psi > 3$, on a $d^0\psi_3 \geqslant 2$. Or $(\psi_3 - \psi_1\psi_2)\psi_3 + \psi_2^2 + \psi_1^2 = x^2 + y^2 + z^2 - xyz$. Si l'on avait $d^0\psi_3 \neq d^0\psi_1\psi_2$ on aurait

$$3 = \sup(d^0\psi_3, d^0\psi_1\psi_2) + d^0\psi_3 \geqslant 4 .$$

On a donc $d^0\psi_3 = d^0\psi_1\psi_2$, d'où $d^0\psi_3 > d^0\psi_2$. Si l'on avait $d^0(\psi_3 - \psi_1\psi_2) = d^0\psi_3$, on aurait $2d^0\psi_3 = 3$, donc on a $d^0(\psi_3 - \psi_1\psi_2) < d^0\psi_3$. Ceci montre que $\deg \Phi_\beta \circ \psi < \deg \psi$. Ceci achève la démonstration du lemme.

THÉORÈME 4. *$\mathscr{A}$ est le groupe engendré par $\Phi_\alpha, \Phi_\beta, \Phi_\gamma$ et $\rho$.*

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer de façon répétitive le lemme précédent pour se ramener au lemme 2.

THÉORÈME 5. *L'ensemble des $\sigma \in \mathrm{Hom}(F, F)$ tels que $Q_\sigma = 1$ est l'ensemble des automorphismes de $F$.*

*Démonstration.* Dire que $Q_\sigma = 1$ équivaut à dire $\Phi_\sigma \in \mathscr{A}$. Si $\Phi_\sigma \in \mathscr{A}$, le lemme 3 permet de montrer l'existence d'un $\tau \in < \alpha, \beta, \gamma >$ tel que $\Phi_\tau \circ \Phi_\sigma \in \{\theta, \rho\}$. Mais, en vertu des lemmes II.3 et II.4, on a alors $\Phi_\tau \circ \Phi_\sigma = \mathrm{id}$. Il en résulte (théorème II.5) que $\tau \circ \sigma$ est un automorphisme, donc aussi $\sigma$.

LEMME 6. *Si $i_w$ désigne l'automorphisme intérieur $u \to wuw^{-1}$ de $F$. On a*

$$i_a = \beta\alpha\beta\gamma\beta\gamma\alpha\beta \quad \text{et} \quad i_b = \alpha i_a \alpha \, .$$

*Démonstration.* Elle se fait par vérification directe.

THÉORÈME 7. *L'ensemble des automorphismes de $F$ est le groupe engendré par $\alpha, \beta$ et $\gamma$.*

*Démonstration.* Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}\, F$. Alors $\Phi_\sigma \in \mathscr{A}$. Comme précédemment, il existe $\tau \in < \alpha, \beta, \gamma >$ tel que $\Phi_\tau \circ \Phi_\sigma = \mathrm{id}$. Le théorème II.1 montre alors $\tau \circ \sigma$ est soit un automorphisme intérieur, soit un automorphisme intérieur composé avec $(a^{-1}, b^{-1})$, qui n'est autre que $(\alpha\beta)^2$. Le théorème résulte alors du lemme précédent.

*Remarque.* Ce théorème est un résultat ancien de Nielsen [5], [6], mais la démonstration que nous en donnons ne fait pas appel à la délicate théorie de la réduction de Nielsen.

## IV. ETUDE DES RELATIONS $\Phi_\sigma = \Phi_\tau$ ET $Q_\sigma = 0$ .

Notons $F^*$ l'ensemble des éléments $w$ de $F$ qui sont image d'un générateur par un automorphisme de $F$.

THÉORÈME 1. *Soit $\sigma$ et $\tau$ deux endomorphismes de $F$ tels que $\sigma(a), \sigma(b)$ et $\sigma(ab)$ soient dans $F^*$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*