

Objektyp: **Abstract**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

<http://www.e-periodica.ch>

POLYNÔMES ASSOCIÉS AUX ENDOMORPHISMES DE GROUPES LIBRES

par Jacques PEYRIÈRE, WEN ZHI-YING et WEN ZHI-XIONG

ABSTRACT. If σ is an endomorphism of F , the free group generated by a and b , there exists a unique polynomial map Φ_σ from \mathbf{C}^3 to \mathbf{C}^3 , with integral coefficients, such that, for any representation φ of F in $SL(2, \mathbf{C})$, one has

$$(\operatorname{tr} \varphi(\sigma(a)), \operatorname{tr} \varphi(\sigma(b)), \operatorname{tr} \varphi(\sigma(ab))) = \Phi_\sigma(\operatorname{tr} \varphi(a), \operatorname{tr} \varphi(b), \operatorname{tr} \varphi(ab)) .$$

The following relation holds: $\Phi_{\sigma' \circ \sigma} = \Phi_\sigma \circ \Phi_{\sigma'}$. The kernel of Φ is shown to be generated by the inner automorphisms of F and the involution which takes a to a^{-1} and b to b^{-1} . If λ denotes the polynomial $x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 4$, then $\lambda \circ \Phi_\sigma$ factorizes under the form $\lambda \cdot Q_\sigma$, where Q_σ is a polynomial with integral coefficients. Among other properties of Q_σ , it is proved that σ is an automorphism of E if and only if Q_σ equals 1 identically. The case of a free group with more than two generators is also studied but, in this case, results are less complete.

RÉSUMÉ. A chaque endomorphisme σ du groupe libre F engendré par a et b on associe une unique application polynomiale Φ_σ , à coefficients entiers, de \mathbf{C}^3 dans \mathbf{C}^3 telle que, pour toute représentation φ de F dans $SL(2, \mathbf{C})$ on ait

$$(\operatorname{tr} \varphi(\sigma(a)), \operatorname{tr} \varphi(\sigma(b)), \operatorname{tr} \varphi(\sigma(ab))) = \Phi_\sigma(\operatorname{tr} \varphi(a), \operatorname{tr} \varphi(b), \operatorname{tr} \varphi(ab)) .$$

L'application Φ est un anti-homomorphisme du monoïde des endomorphismes de F dans le monoïde des applications polynomiales de \mathbf{C}^3 dans \mathbf{C}^3 , muni de la composition. Diverses propriétés de Φ sont établies. En particulier, son noyau est caractérisé. En outre, si λ désigne le polynôme $x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 4$, le polynôme $\lambda \circ \Phi$ se factorise sous la forme $\lambda \cdot Q_\sigma$ où Q_σ est un polynôme à coefficients entiers. Il est établi, entre autre, que σ est un automorphisme de F si et seulement si Q_σ est identiquement égal à 1. Le cas d'un groupe libre à plus de deux générateurs est également abordé, mais avec des résultats moins complets.

Cet article répond à certaines questions posées dans [8]. Pour la commodité du lecteur, dans la première partie, les résultats de [8] sont repris, et dans certains cas précisés.

I. INTRODUCTION

On désigne dans les sections 1, 2, 3, 4 et 5 par F le groupe libre à deux générateurs, a et b . On note $\text{tr } A$ la trace de la matrice carrée A . Si φ est un homomorphisme de F dans $SL(2, \mathbf{C})$, on note $T\varphi$ le triplet $(\text{tr } \varphi(a), \text{tr } \varphi(b), \text{tr } \varphi(ab))$.

L'image de T est \mathbf{C}^3 tout entier: pour s'en persuader, il suffit de considérer les φ tels que $\varphi(a) = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\varphi(b) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda^{-1} & y \end{pmatrix}$.

Si σ et σ' sont des endomorphismes de F , on pose $\sigma\sigma' = \sigma' \circ \sigma$. On identifiera un élément σ de $\text{Hom}(F, F)$ au couple $(\sigma(a), \sigma(b)) \in F \times F$.

Si w est un élément de F , on désignera par \tilde{w} l'élément de \mathbf{Z}^2 , image de w par l'homomorphisme d'abélianisation. Si σ est un endomorphisme de F , il définit, par abélianisation, un endomorphisme de \mathbf{Z}^2 dont nous désignerons par $\tilde{\sigma}$ la matrice transposée. En d'autres termes, $\tilde{\sigma}$ est la matrice carrée indexée par $\{a, b\} \times \{a, b\}$ dont les coefficients d'interprètent de la façon suivante: si u et v appartiennent à $\{a, b\}$, $\tilde{\sigma}_{u,v}$ = somme des puissances de la lettre v dans $\sigma(u)$. On a évidemment $(\sigma\sigma')^{\sim} = \tilde{\sigma}\tilde{\sigma}'$.

On note λ le polynôme $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 4$. On sait que, pour $\varphi \in \text{Hom}(F, SL(2, \mathbf{C}))$, $\lambda(T\varphi)$ est nul si et seulement si $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ ont une direction propre commune.

LEMME 1. Soit A et B deux éléments de $SL(2, \mathbf{C})$. On a

$$AB + BA = \text{tr}(AB) - (\text{tr } A)(\text{tr } B) + A \text{tr } B + B \text{tr } A .$$

Démonstration. Le théorème de Cayley-Hamilton donne les relations suivantes:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \text{tr } A - A \\ B^{-1} &= \text{tr } B - B \\ (AB)^2 &= AB \text{tr}(AB) - 1 . \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} BA &= A^{-1}ABABB^{-1} \\ &= A^{-1}(AB \text{tr}(AB) - 1)B^{-1} \\ &= \text{tr}(AB) - (\text{tr } A - A)(\text{tr } B - B) \\ &= \text{tr}(AB) - (\text{tr } A)(\text{tr } B) + A \text{tr } B + B \text{tr } A - AB . \end{aligned}$$