Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 39 (1993)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÈBRES
Autor: Serre, Jean-Pierre
Kapitel: 4.2. La bigèbre d'un groupe
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-60413>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

des A -modules de rang fini sur celle des $\hat{A}$ -modules topologiques discrets de rang fini.

Soit F le dual de A ; on le munit de sa structure naturelle de A -bimodule. Si $a \in S$, soit F_a l'orthogonal de a dans F . Soit C la réunion des F_a , pour $a \in S$. Le dual de C (resp. le dual topologique de $\hat{A}$) s'identifie de façon évidente à $\hat{A}$ (resp. à C). D'après le n° 2.2, il y a donc sur C une structure de *cogèbre*, caractérisée par la formule:

$$(1) \quad \langle d(c), a \otimes b \rangle = \langle c, ab \rangle \quad \text{si } c \in C, a, b \in A .$$

De plus, tout A -module à droite de rang fini est muni canoniquement d'une structure de comodule à gauche sur C , et réciproquement; on a

$$(2) \quad \langle d_E(x), a \otimes x' \rangle = \langle xa, x' \rangle \quad \text{si } x \in E, x' \in E', a \in A$$

d'après la formule (1) du n° 2.2.

Les éléments de la cogèbre C peuvent être caractérisés de la manière suivante:

LEMME 1. *Soit f un élément du dual F de A . Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) $f \in C$.

(b) (resp. (b')) *Le sous- A -module à gauche (resp. à droite) de F engendré par f est de rang fini.*

(c) *Il existe un A -module à droite E de rang fini, et des éléments $x_i \in E, x'_i \in E'$ en nombre fini, tels que*

$$\langle f, a \rangle = \sum \langle x_i a, x'_i \rangle \quad \text{pour tout } a \in A .$$

La condition (b) signifie que l'annulateur de f dans le A -module à gauche F appartient à S_g ; comme S est cofinal dans S_g , cela revient à dire que f appartient à C . On démontre de même que (a) $\Leftrightarrow$ (b').

D'autre part, pour un module E donné, la condition (c) signifie que f appartient à la sous-cogèbre C_E de C attachée à E (cf. n° 2.1). Comme C est réunion des C_E , cela prouve que (a) $\Leftrightarrow$ (c).

[On laisse au lecteur le plaisir de démontrer directement l'équivalence (b) $\Leftrightarrow$ (c).]

4.2. LA BIGÈBRE D'UN GROUPE

On applique ce qui précède à l'algèbre $A = K[\Gamma]$ d'un groupe Γ . Le dual $F = F(\Gamma)$ de A est l'espace des fonctions sur Γ ; la dualité entre A et F s'exprime par la formule:

$$\langle f, \sum \lambda_i \gamma_i \rangle = \sum \lambda_i f(\gamma_i) \quad \text{si } f \in F, \lambda_i \in K, \gamma_i \in \Gamma .$$

La cogèbre correspondante est notée $C = C(\Gamma)$. Elle jouit des propriétés suivantes:

(i) La co-unité de C est l'application $e: f \mapsto f(1)$.

(ii) Pour qu'une fonction f appartienne à C , il faut et il suffit que ses *translatées* (à gauche ou à droite) *engendrent un K -espace vectoriel de dimension finie*. (C'est l'équivalence (a) $\Leftrightarrow$ (b) du Lemme 1.)

(iii) Identifions à la façon habituelle les éléments de $F \otimes F$ aux *fonctions décomposables* sur $\Gamma \times \Gamma$. Si $f \in C$, on a $d(f) \in C \otimes C$ et $C \otimes C$ est un sous-espace de $F \otimes F$; ainsi $d(f)$ peut être interprétée comme une fonction sur $\Gamma \times \Gamma$. On a:

$$(3) \quad d(f)(\gamma_1, \gamma_2) = f(\gamma_1 \gamma_2) \quad \text{si} \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma.$$

(Cela ne fait que traduire la formule (1) du n° précédent.)

(iv) C contient 1, et est stable par le *produit*: cela résulte de (ii).

(v) Les structures de cogèbre et d'algèbre de C sont *compatibles* entre elles, i.e. elles font de C une *bigèbre*. Cette bigèbre vérifie les axiomes du n° 3.1. (L'axiome (i) dit que $f \mapsto d(f)$ doit être un morphisme d'algèbres; c'est le cas. Les autres axiomes sont encore plus évidents.)

(vi) La bigèbre C possède une *inversion* i donnée par

$$(4) \quad i(f)(\gamma) = f(\gamma^{-1}).$$

(Il faut vérifier les conditions (a) et (b) du n° 3.1. La condition (a) est évidemment satisfaite. Pour (b), soit $f \in C$ et écrivons $d(f)$ sous la forme

$$\sum_{\alpha} g_{\alpha} \otimes h_{\alpha}.$$

On a

$$(1_C \otimes i)(d(f)) = \sum g_{\alpha} \otimes i(h_{\alpha})$$

et l'on doit voir que $\sum g_{\alpha} \cdot i(h_{\alpha}) = e(f) \cdot 1$. Or, si $\gamma \in \Gamma$, on a

$$\begin{aligned} \sum g_{\alpha}(\gamma) i(h_{\alpha})(\gamma) &= \sum g_{\alpha}(\gamma) h_{\alpha}(\gamma^{-1}) = d(f)(\gamma, \gamma^{-1}) \\ &= f(\gamma \cdot \gamma^{-1}) = f(1) = e(f), \end{aligned}$$

d'où la formule voulue.)

(vii) Soit $G = \text{Spec}(C)$ le *schéma en groupes* attaché à C . Tout élément $\gamma \in \Gamma$ définit un morphisme $f \mapsto f(\gamma)$ de C dans K , donc un élément du groupe $G(K)$ des points de G à valeurs dans K . L'application $\Gamma \rightarrow G(K)$ ainsi définie est un *homomorphisme*; cela résulte de la définition de la loi de composition de $G(K)$.

(viii) D'après le n° 4.1, tout Γ -module à droite E de rang fini est muni canoniquement d'une structure de C -comodule à gauche de rang fini (et inversement). Plus précisément, si $(v_i)_{i \in I}$ est une base de E , et si l'on a

$$(5) \quad v_i \gamma = \sum_{j \in I} c_{ij}(\gamma) v_j, \quad \text{avec } c_{ij} \in C,$$

le coproduit de E est donné par:

$$(6) \quad d_E(v_i) = \sum_{j \in I} c_{ij} \otimes v_j.$$

(ix) La correspondance définie ci-dessus entre Γ -modules à droite de rang fini et C -comodules à gauche de rang fini est *compatible* avec les opérations «produit tensoriel» et «contragrédiente»; cela résulte de ce qui a été dit au n° 3.2, combiné avec (vii) ci-dessus.

Remarque. On peut caractériser $G = \text{Spec}(C)$ par la propriété universelle suivante: tout homomorphisme de Γ dans le groupe $H(K)$ des K -points d'un schéma en groupe affine H se prolonge de manière unique en un morphisme $G \rightarrow H$. Le foncteur $\Gamma \mapsto G$ est donc *adjoint* du foncteur $H \mapsto H(K)$.

4.3. L'ENVELOPPE D'UN GROUPE RELATIVEMENT À UNE CATÉGORIE DE REPRÉSENTATIONS

On conserve les notations du numéro précédent.

DÉFINITION 1. Soit L une sous-catégorie pleine de la catégorie des Γ -modules à gauche de rang fini. On dit que L est saturée si L vérifie les conditions suivantes:

a) Si $E \in L$ et si F est isomorphe, soit à un quotient de E , soit à un sous-objet de E , on a $F \in L$.

b) L est stable par somme directe finie, produit tensoriel et contragrédiente.

c) La représentation unité (de module K) appartient à L . (Bien entendu, on a une notion analogue pour les Γ -modules à droite.)

THÉORÈME 1. Si L est saturée, il existe une sous-bigèbre C_L de $C(\Gamma)$ et une seule telle que L soit la catégorie des C_L -comodules à droite de rang fini. La bigèbre C_L contient l'élément 1, vérifie les axiomes du n° 3.1, et est stable par l'inversion i .

Cela résulte des props. 2 et 3 du n° 3.3.