3.1. DÉFINITIONS ET CONVENTIONS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

d) *Cas général.*

Soit X l'ensemble des sous-catégories N de M telles qu'il existe $E \in M$ avec $N = M_E$. L'ensemble X est ordonné filtrant puisque $M_{E_1 \times E_2}$ contient M_{E_1} et M_{E_2}. Si $N \in X$, soit comme ci-dessus (P_N, x_N) un couple représentant la restriction à N du foncteur v, et soit $A_N = \mathrm{End}(P_N)$. Si $N_1 \supset N_2$, il existe un unique morphisme $P_{N_1} \to P_{N_2}$ transformant x_{N_1} en x_{N_2}; on voit aisément que ce morphisme identifie P_{N_2} au plus grand quotient de P_{N_1} appartenant à N_2. En particulier, tout endomorphisme de P_{N_1} définit par passage au quotient un endomorphisme de P_{N_2}. D'où un homomorphisme $A_{N_1} \to A_{N_2}$ qui est surjectif. Si A désigne l'algèbre profinie limite projective des A_N, pour $N \in X$, il est alors clair que la cogèbre duale de A répond à la question.

Quant à l'*unicité* de cette cogèbre (ou de l'algèbre A), elle provient de la remarque suivante: *A est isomorphe à l'algèbre des endomorphismes du foncteur v*, munie de la topologie de la convergence simple.

Remarque. Il est probablement possible d'éviter le passage par le cas $M = M_E$, en utilisant le théorème de Grothendieck disant qu'un foncteur exact à droite est proreprésentable: on appliquerait ce théorème à v, d'où $P \in \mathrm{Pro}\, M$ représentant v et on obtiendrait A comme l'algèbre des endomorphismes de P.

§ 3. BIGÈBRES

3.1. DÉFINITIONS ET CONVENTIONS

(Dans ce n°, ainsi que dans le suivant, on ne suppose pas que K soit un corps.)

Rappelons (cf. *Alg.* III) qu'une *bigèbre* sur K est un K-module C muni d'une structure de cogèbre $d: C \to C \otimes C$ et d'une structure d'algèbre $m: C \otimes C \to C$, ces structures vérifiant l'axiome suivant:

(i) Si l'on munit $C \otimes C$ de la structure d'algèbre produit tensoriel de celle de C par elle-même, d est un homomorphisme d'algèbres de C dans $C \otimes C$.

Cet axiome équivaut d'ailleurs à:

(i′) L'application $m: C \otimes C \to C$ est un morphisme de cogèbres (pour la structure naturelle de cogèbre de $C \otimes C$).

Dans tout ce qui suit, nous réserverons le terme de *bigèbres* à celles vérifiant les conditions suivantes:

(ii) La cogèbre (C, d) possède une co-unité $e: C \to K$.

(iii) L'algèbre (C, m) est commutative, associative, et possède un élément unité 1.

(iv) La co-unité $e: C \to K$ est un morphisme d'algèbres et $e(1) = 1$.

(v) On a $d(1) = 1 \otimes 1$.

La condition (iii) permet de considérer C comme l'*algèbre affine* d'un schéma affine G sur K; on a $G = \mathrm{Spec}(C)$. Pour tout $K_1 \in \mathrm{Alg}_K$, on note $G(K_1)$ l'ensemble des points de G à valeurs dans K_1, autrement dit l'ensemble des morphismes (au sens de Alg_K) de C dans K_1. La condition (iv) signifie que e est un élément de $G(K)$. Grâce aux conditions (i) et (v), la structure de cogèbre de C peut être interprétée comme un *morphisme* de $G \times G$ dans G, qui est *associatif* et admet e pour élément neutre. Ainsi G est un *schéma affine en monoïdes* sur K; pour tout $K_1 \in \mathrm{Alg}_K$, $G(K_1)$ a une structure naturelle de monoïde, d'élément neutre l'image de e dans $G(K_1)$, image que l'on se permet de noter encore e.

On appelle *inversion* sur C, toute application $i: C \to C$ ayant les propriétés suivantes:

a) i est un morphisme d'algèbres, et $i(1) = 1$.

b) $m \circ (1_C \otimes i) \circ d$ est égal à l'endomorphisme $c \mapsto e(c).1$ de C.

La condition a) permet d'interpréter i comme un morphisme $I: G \to G$ et la condition b) signifie que $x.I(x) = e$ pour tout $x \in G(K_1)$, et tout K_1. On voit ainsi que, si i existe, il est unique, et que c'est un isomorphisme de C sur la bigèbre opposée C^o. L'existence de i revient à dire que G est un *schéma en groupes*.

Remarque. L'application identique $C \to C$ est un point de $G(C)$, appelé *point canonique*; nous le noterons γ. De même, on peut interpréter une inversion i de C comme un point ι de $G(C)$ et la condition b) signifie que $\gamma\iota = e$.

3.2. Correspondance entre comodules et G-modules

Soit E un module. Si $K_1 \in \mathrm{Alg}_K$, nous noterons $\mathrm{End}_E(K_1)$ le monoïde des endomorphismes du K_1-module $K_1 \otimes E$, et $\mathrm{Aut}_E(K_1)$ le groupe des éléments inversibles de $\mathrm{End}_E(K_1)$. Si $K_1 \to K_2$ est un morphisme, on définit de manière évidente le morphisme correspondant de $\mathrm{End}_E(K_1)$ dans $\mathrm{End}_E(K_2)$. Ainsi End_E est un foncteur de Alg_K dans la catégorie Mon des monoïdes; de même Aut_E est un foncteur de Alg_K dans la catégorie Gr des groupes.

Soient maintenant C et $G = \mathrm{Spec}(C)$ comme ci-dessus. On a vu que G définit un foncteur (noté également G) de Alg_K dans Mon; ce foncteur est à valeurs dans Gr si G est un schéma en groupes.

Définition 1. *On appelle représentation linéaire de* G *dans* E *tout morphisme* ρ *du foncteur* G *dans le foncteur* End_E.