

5. More questions

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **17.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Finally

$$\liminf_{\delta(x) \rightarrow \infty} \frac{\delta(Tx)}{\delta(x)} = \frac{1}{\Theta(\Delta)}.$$

The following table gives the first values of Θ

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\Theta(n)$	1	3	3	3	5	3	5	5	5	5	...

Actually Theorem 1 can be improved. There exist two constants $C_1 = C_1(T)$ and $C_2 = C_2(T)$ such that for all rational x

$$\frac{1}{\Theta(\Delta)} \delta(x) - C_1 \leq \delta(Tx) \leq \Theta(\Delta) \delta(x) + C_2.$$

Both inequalities are sharp apart from the exact values of C_1 and C_2 .

5. MORE QUESTIONS

To every Möbius map T we associate the interval $I(T) = [\Theta^{-1}(\Delta), \Theta(\Delta)]$.

PROBLEM 3. *Is it true that for all $\zeta \in I(T)$ there exists a sequence of rational numbers x_n such that $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(x_n) = \infty$ and*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta(Tx_n)}{\delta(x_n)} = \zeta?$$

PROBLEM 4. *Let $T_1, T_2, \dots, T_k$ be Möbius maps with pairwise coprime determinants $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$.*

Is it true that for all

$$(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k) \in \prod_{i=1}^k I(T_i)$$

there exists a sequence of rational x_n with strictly increasing depths such that for all $i = 1, 2, \dots, k$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta(T_i x_n)}{\delta(x_n)} = \zeta_i?$$

Can k be infinite?

The following result should be mentioned at this point.

THEOREM 3. *There exists a sequence of rational numbers x_n with strictly increasing depths such that for all Möbius maps T*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta(Tx_n)}{\delta(x_n)} = 1 .$$

The proof is quite simple. To each irrational

$$x = [c_0, c_1, c_2, \dots]$$

we associate the sequence of best approximations

$$x_n = \frac{p_n}{q_n} = [c_0, c_1, c_2, \dots, c_n] .$$

Paul Lévy [9] showed that for almost all x

$$\ln q_n \sim \frac{\pi^2}{12 \ln 2} n$$

as n goes to infinity (see for example [1] p. 45). In other words, for almost all x

$$\delta(x_n) \sim \frac{12 \ln 2}{\pi^2} \ln q_n .$$

Therefore, for almost all x

$$\delta\left(\frac{ax_n + b}{cx_n + d}\right) \sim \frac{12 \ln 2}{\pi^2} \ln(cp_n + dq_n) .$$

Now $p_n \sim xq_n$ so that

$$\begin{aligned} cp_n + dq_n &\sim (cx + d)q_n \\ \ln(cp_n + dq_n) &\sim \ln q_n . \end{aligned}$$

Hence for almost all x

$$\delta\left(\frac{ax_n + b}{cx_n + d}\right) \sim \delta(x_n) .$$

By countable intersection, we conclude that for almost all x and for all Möbius map T

$$\delta(Tx_n) \sim \delta(x_n) . \quad \text{QED}$$

PROBLEM 5. Let T be a given Möbius map and let $I(T)$ be the associated interval. Let $\zeta \in I(T)$. To compute the Hausdorff dimension of those x for which

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta(Tx_n)}{n} = \zeta.$$

Extend this problem to higher dimensions in the spirit of problem 4.

§6. QUADRATIC SURDS

Let x be a real quadratic number. Its continued fraction expansion is ultimately periodic. Let $\pi(x)$ be its period. H. Cohen [3], followed by J. Cusick [4] and Paysant-Leroux [11] studied the action of a Möbius map on the period. They established that

$$\limsup_{\pi(x) \rightarrow \infty} \frac{\pi(Tx)}{\pi(x)} = R(\Delta)$$

where $R(\Delta)$ is an integer. Furthermore

$$A n \ln n \leq R(n) \leq B n \ln n + 1$$

for some constants $A > 0$, $B > 0$. A simple argument then shows that

$$\liminf_{\pi(x) \rightarrow \infty} \frac{\pi(Tx)}{\pi(x)} = \frac{1}{R(\Delta)}.$$

PROBLEM 6. Is it true that for all real quadratic irrational x

$$\sup_n \pi(x^n) = \infty?$$

Define the interval

$$J(\Delta) = \left[\frac{1}{R(\Delta)}, R(\Delta) \right].$$

PROBLEM 7. Let $\zeta \in J(\Delta)$. Prove the existence of a sequence of real quadratic numbers x_n with strictly increasing period such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(Tx_n)}{\pi(x_n)} = \zeta.$$

Extend this result to higher dimensions as in Problem 4.