

Objektyp: **ReferenceList**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

PROPOSITION 5.  $T'T'' = T''T'$  (see figure 9).

*Proof.* For any point of the annulus between  $\Gamma'$  and  $\Gamma$  there is an ellipse from the pencil through it. Both maps preserve this ellipse and both are shifts in the affine parameter on it. Since shifts commute, the proposition follows.

We refer to [T3] for a partial converse statement to the proposition.

One can also slightly generalize Poncelet's theorem (this generalization was known to Poncelet too). Consider a number of ellipses from a pencil:  $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$  etc, and let  $\Gamma$  contain all the others. Choose a point  $x \in \Gamma$ , draw a tangent line to  $\Gamma'$ , find its intersection with  $\Gamma$ , draw a tangent line to  $\Gamma''$  etc. Then, if  $x$  returns back after a number of iterations, any initial point on  $\Gamma$  does. It follows again from the fact that  $T', T''$  etc. are shifts in the affine parameter on  $\Gamma$ .

We conclude with a conjecture. Let a smooth strictly convex curve  $\Gamma_0$  be given in the plane. Assume that its outer neighbourhood is foliated by convex curves  $\Gamma_\lambda, \lambda \in [0, \varepsilon[$ . Assume also that, for any line tangent to  $\Gamma_0$ , the (local) involution, defined on it by its intersections with the curves  $\Gamma_\lambda$ , is a projective transformation. Then the curves  $\Gamma_\lambda$  belong to a pencil of ellipses.

*Acknowledgements.* I am grateful to M. Berger, E. Ghys, P. de la Harpe and J. Moser for stimulating discussions and to ENS de Lyon for its hospitality.

#### REFERENCES

- [A.-G.] ARNOLD, V. and A. GIVENTAL. *Symplectic Geometry*. Dynamical Syst. v.4. Springer (1990).
- [B] BERGER, M. *Geometry*. Springer (1987).
- [B.-K.-O.-R.] BOS, H., C. KERS, F. OORT and D. RAVEN. Poncelet's Closure Theorem. *Expos. Math.* 5 (1987), 289-364.
- [F.-T.] FUCHS, D. and S. TABACHNIKOV. Segments of Equal Areas. *Quantum*, N2 (1992), translated from Kvant (in Russian).
- [G.-H. 1] GRIFFITH, P. and J. HARRIS. A Poncelet Theorem in Space. *Comm. Math. Helv.* 52 (1977), 145-160.
- [G.-H. 2] GRIFFITH, P. and J. HARRIS. On Cayley's Explicit Solution of Poncelet's Porism. *L'Enseign. Math.* 24 (1978), 31-40.
- [M] MOSER, J. Is the Solar System Stable? *Math. Intell.* 1, N2 (1978).
- [T 1] TABACHNIKOV, S. On the Dual Billiard Problem. *Adv. Math.*, to appear.
- [T 2] ——— Dual Billiards. IHES preprint (1992).
- [T 3] ——— Commuting Dual Billiard Maps. ETH preprint (1993).

Serge Tabachnikov

(Reçu le 5 octobre 1992)

Department of Mathematical Sciences  
University of Arkansas, 301 SCEN  
Fayetteville, AR 72701, USA