

1. Introduction

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ELLIPTIC SPACES II

by Yves FELIX, Stephen HALPERIN¹⁾ and Jean-Claude THOMAS²⁾

ABSTRACT. A simply connected finite CW complex X is *elliptic* if the homology of its loop space (coefficients in any field) grows at most polynomially. We show that in all other cases the loop space homology grows at least semi-exponentially, and we exhibit a number of geometrically interesting classes of spaces as elliptic, including: H spaces, homogeneous spaces, Poincaré duality complexes whose mod p cohomology is doubly generated (any p) and Dupin hypersurfaces in S^{n+1} .

1. INTRODUCTION

Let X be a simply connected finite CW complex, with loop space ΩX , and denote by \mathbf{F}_p , the prime field of characteristic p , p prime or zero. Our first main result asserts a dichotomy for the size of the loop space homology $H_*(\Omega X; \mathbf{F}_p)$:

THEOREM A. *Let X be a simply connected finite CW complex. For each p (prime or zero) there are exactly two possibilities: either*

(i) *There are constants $C > 0$ and $r \in \mathbf{N}$ such that*

$$\sum_{i=0}^n \dim H_i(\Omega X; \mathbf{F}_p) \leq Cn^r, \quad n \geq 1,$$

Key words: loop space homology, depth, polynomial growth, Poincaré complex, elliptic, Dupin hypersurface.

AMS Mathematical subject classification: 55P35, 57P10, 57T25, 57S25, 53C25.

Research partially supported by a NATO travel grant held by the three authors.

¹⁾ Research partially supported by an NSERC operating grant.

²⁾ URA-D751 au CNRS.

or else

(ii) There are constants $K > 1$ and $N \in \mathbf{N}$ such that

$$\sum_{i=0}^n \dim H_i(\Omega X; \mathbf{F}_p) \geq K\sqrt{n}, \quad n \geq N.$$

In case (i) the loop space homology grows *at most polynomially*, and X is $\mathbf{Z}_{(p)}$ -elliptic in the sense of [6]. If (i) holds for all p then X is elliptic. The main theorems of [6] assert that if X is elliptic then X is a Poincaré complex and that $H_*(\Omega X; \mathbf{Z})$ is a finitely generated left noetherian ring.

In case (ii) above the loop space homology grows *at least semi-exponentially*. However, when $p = 0$ [2] or $p \geq \dim X$ [8], it can be shown that even the primitive subspace of $H_*(\Omega X; \mathbf{F}_p)$ grows exponentially (implying the same result for $H_*(\Omega X; \mathbf{F}_p)$), and we conjecture that this should hold true for all p .

In the dichotomy of Theorem A, the generic situation is (ii): elliptic spaces are rare within the class of all simply connected finite CW complexes. However a number of geometrically interesting spaces are elliptic, and our second objective in this note is to show that these include the following classes of spaces (provided they are simply connected):

finite H -spaces,

homogeneous spaces,

spaces admitting a fibration $F \rightarrow X \rightarrow B$ with F, B elliptic,

Poincaré complexes X such that for each p , the algebra $H^*(X; \mathbf{F}_p)$ is generated by two elements,

Dupin hypersurfaces in S^{n+1} ,

closed manifolds admitting a smooth action by a compact Lie group, with a simply connected codimension one orbit,

connected sums $M \# N$ with the algebras $H^*(M; \mathbf{Z})$ and $H^*(N; \mathbf{Z})$ each generated by a single class.

This note is sequel to “Elliptic Spaces” [6]. In particular, it supersedes the preprint “Dupin hypersurfaces are elliptic” referred to in [6].

2. THE DICHOTOMY

Consider first any simply connected space X with each $H_i(X; \mathbf{F}_p)$ finite dimensional. Then $G = H_*(\Omega X; \mathbf{F}_p)$ is a graded cocommutative Hopf algebra satisfying $G_0 = \mathbf{F}_p$ and each G_i is finite dimensional. The *depth* of G