

## 3.3. Le cas d'un polytope rationnel

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$\begin{aligned} i_P(n) - \text{card}((n\partial P) \cap M) &= \text{card}((nP) \cap M) - \text{card}((n\partial P) \cap M) \\ &= i_P^\circ(n) = (-1)^d i_P(-n), \end{aligned}$$

où  $\partial P$  désigne le bord de  $P$ . Donc, si  $a$  est le coefficient de  $n^{d-1}$  dans  $i_P(n)$ ,

$$a - \sum_{\text{codim}(F)=1} \mu(F) = (-1)^d (-1)^{d-1} a,$$

d'où  $a = \sum_{\text{codim}(F)=1} \mu(F)/2$ . Dans le cas général, puisque

$$\begin{aligned} i_{\omega, P}(n) &= \sum_F \omega(F, P) i_F^\circ(n) = (-1)^d \overset{\circ}{\omega} i_P(-n) \\ &+ \sum_{F \neq P} (-1)^{\dim(F)} \omega(F, P) i_F(-n), \end{aligned}$$

le coefficient de  $n^{d-1}$  dans  $i_{\omega, P}(n)$  est

$$\overset{\circ}{\omega} a - \sum_{\text{codim}(F)=1} \omega(F, P) \mu(F).$$

Le même argument réduit la preuve de la dernière assertion au cas où  $\omega = \chi$ ; il faut montrer que  $i_P(0) = \sum_F (-1)^{\dim(F)} = 1$ . Mais cela résulte facilement de la preuve du théorème 3.1, et du fait que

$$\sum_{s \in \mathcal{C}} \Phi(P_s) = 1.$$

En effet, les  $\check{P}_s$  sont les cônes de dimension maximale d'une subdivision de  $V^*$  (voir 2.2), et le corollaire 2.1 s'applique.  $\square$

### 3.3. LE CAS D'UN POLYTOPE RATIONNEL

Dans cette section, on considère un polytope convexe  $P$  dans  $V$ , rationnel par rapport au réseau  $M$ : pour tout sommet  $s$  de  $P$ , il existe un entier  $n_s > 0$  tel que  $n_s \cdot s \in M$ . On va étendre à cette situation les résultats de 3.1 et 3.2.

Soit  $\omega$  un poids; posons  $i_{\omega, P}(n) = \sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP)$ . Notons  $\tilde{M}$  le réseau engendré par  $M$  et les sommets de  $P$ . Soit  $\gamma$  le plus petit entier positif tel que  $\gamma \cdot s \in M$  pour tout sommet  $s$  de  $P$  (c'est l'exposant du groupe abélien fini  $\tilde{M}/M$ ).

**THÉORÈME.** *Il existe des fonctions polynomiales  $i_{\omega, P}^{(1)}, \dots, i_{\omega, P}^{(\gamma)}$  sur  $\mathbf{R}$ , telles que  $i_{\omega, P}(n) = i_{\omega, P}^{(r)}(n)$  si  $n \equiv r \pmod{\gamma}$ . De plus, on a*

$$i_{\omega, P}^{(r)}(-t) = (-1)^d i_{\omega^*, P}^{(\gamma-r)}(-t)$$

pour tout  $t \in \mathbf{R}$ .

*Démonstration.* Soit  $\pi: \mathbf{Z}[[\tilde{M}]] \mapsto \mathbf{Z}[[M]]$  l'application définie par

$$\pi\left(\sum_{p \in \tilde{M}} a_p x^p\right) = \sum_{p \in M} a_p x^p.$$

C'est un morphisme de  $\mathbf{Z}[M]$ -modules. Soit  $\tilde{S}$  le sous-ensemble de  $\mathbf{Z}[\tilde{M}]$  formé des produits finis d'éléments de la forme  $1 - x^p, p \in \tilde{M} \setminus \{0\}$ ; et soit  $\tilde{S}^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}]$  le sous-anneau du corps des fractions de  $\mathbf{Z}[\tilde{M}]$  engendré par  $\tilde{S}^{-1}$  et  $\mathbf{Z}[\tilde{M}]$ . De l'identité

$$(1 - x^p)^{-1} = (1 - x^{\gamma p})^{-1} \left( \sum_{n=0}^{\gamma-1} x^{np} \right),$$

résulte que  $\tilde{S}^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}] = S^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}]$ . Par suite,  $\pi$  s'étend en un unique morphisme de  $\mathbf{Z}[M]$ -modules, noté encore  $\pi: \tilde{S}^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}] \mapsto S^{-1}\mathbf{Z}[M]$ . On a donc, en posant

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_\omega(P) &= \sum_{m \in P \cap \tilde{M}} \omega(m, P) x^m \quad \text{et} \quad \Phi_\omega(P) = \sum_{m \in P \cap M} \omega(m, P) x^m : \\ \Phi_\omega(P) &= \sum_{s \in \mathcal{E}} \pi(x^s \tilde{\Phi}_\omega(P_s)). \end{aligned}$$

De plus, puisque chaque  $P_s$  est rationnel pour le réseau  $M$ , on a:  $\tilde{\Phi}(P_s) \in S_d^{-1}\mathbf{Z}[\tilde{M}]$ . Soit  $n > 0$  un entier; écrivons  $n = q\gamma + r$  où  $q$  est entier, et où  $1 \leq r \leq \gamma$ . Alors

$$\Phi_\omega(nP) = \sum_{s \in \mathcal{E}} \pi(x^{ns} \tilde{\Phi}_\omega(P_s)) = \sum_{s \in \mathcal{E}} x^{q\gamma s} \pi(x^{rs} \tilde{\Phi}_\omega(P_s)).$$

Le résultat s'en déduit comme dans les preuves des théorèmes 3.1 et 3.2.  $\square$

## RÉFÉRENCES

- [B] BRION, M. Points entiers dans les polyèdres convexes. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 4<sup>e</sup> série, 21 (1988), 653-663.
- [D] DEMAZURE, M. Sous-groupes de rang maximum du groupe de Cremona. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 4<sup>e</sup> série, 3 (1970), 507-588.
- [E] EHRHART, E. Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire. I. *J. Reine Angew Math.*, 226 (1967), 1-29.
- [G] GODEMENT, R. *Théorie des faisceaux*. Hermann, Paris, 1958.
- [Ha] HADWIGER, H. *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1957.
- [Hi] HIBI, T. Ehrhart polynomials of convex polytopes,  $h$ -vectors of simplicial complexes and non-singular projective toric varieties. Preprint, juin 1990.
- [I] ISHIDA, M. N. Polyhedral Laurent series and Brion's equalities. *International Journal of Math.* 1 (3) (1990), 251-265.