3.1. Comportement polynomial de fonctions de comptage

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

3. Propriétés énumératives des polytopes convexes entiers

3.1. Comportement polynomial de fonctions de comptage

Soient P un polytope convexe entier, c'est-à-dire l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de M, et ω un poids (voir 2.4). Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$i_{\omega,P}(n) = \sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) ,$$

où $nP = \{np \mid p \in P\}$.

Théorème. *La fonction* $i_{\omega,P}$ *se prolonge en une fonction polynomiale sur* $\mathbf{R}$, *de degré au plus* d.

Démonstration. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des sommets de P. Pour tout $s \in \mathscr{E}$, soit P_s le cône engendré par $-s + P$. Alors l'ensemble des sommets de nP est $n\mathscr{E}$, et on a: $(nP)_{ns} = P_s$ pour tout $s \in \mathscr{E}$. D'après le théorème 2.4, on a:

$$\sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) x^m = \Phi_\omega(nP) = \sum_{s \in \mathscr{E}} x^{ns} \Phi_\omega(P_s) .$$

De plus, chaque $\Phi_\omega(P_s)$ est combinaison linéaire à coefficients entiers de termes de la forme $x^q \prod_{i=1}^{n} (1 - x^{m_i})^{-1}$ où $n \leqslant d$. Choisissons une forme linéaire λ sur V, telle que $\lambda(m_i) \neq 0$ chaque fois que $1 - x^{m_i}$ figure au dénominateur d'un des $\Phi_\omega(P_s)$. Soit $t \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$. Il existe un unique morphisme d'algèbres $\varepsilon: \mathbf{Z}[M] \to \mathbf{R}$ tel que $\varepsilon(x^m) = \exp(t\lambda(m))$, où exp est la fonction exponentielle. Par hypothèse, ε s'étend à l'algèbre engendrée par $\mathbf{Z}[M]$ et les $\Phi_\omega(P_s)$. D'où la relation

$$(8) \qquad \sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) \exp(t\lambda(m)) = \sum_{s \in \mathscr{E}} \exp(tn\lambda(s)) \cdot \varepsilon(\Phi_\omega(P_s)) .$$

De plus, $\varepsilon(\Phi_\omega(P_s))$ est une combinaison linéaire de termes

$$\exp(t\lambda(a)) \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 - \exp(t\lambda(m_i))^{-1} ,$$

donc son développement en série de Laurent en t, est de la forme

$$\varepsilon(\Phi_\omega(P_s)) = \sum_{q=-r_s}^{+\infty} a_q(s) t^q ,$$

avec $r_s \leqslant d$. En comparant les termes constants dans les développements des deux membres de (8) en série de Laurent en t, on trouve

$$\sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) = \sum_{s \in \mathscr{E}} \sum_{p=0}^{r_s} a_{-p}(s) \frac{\lambda(s)^p}{p!} n^p ,$$

d'où le résultat. □

On note encore $i_{\omega, P}$ la fonction polynomiale ainsi définie. En général, $i_{\omega, P}(0)$ n'est pas égale à 1; sa valeur correcte sera calculée dans le corollaire 3 ci-après.

3.2. Loi de réciprocité

On conserve les notations de 3.1. Soit ω^* le poids dual de ω (voir 2.4).

Théorème. *On a l'identité suivante entre fonctions polynomiales:*

$$i_{\omega, P}(-t) = (-1)^d i_{\omega^*, P}(t) .$$

Démonstration. On reprend les notations de la preuve du théorème 3.1. On a

$$\begin{aligned} \Phi_\omega(nP) &= \sum_{s \in \mathscr{E}} x^{ns} \Phi_\omega(P_s) \\ &= (-1)^d \sum_{s \in \mathscr{E}} x^{ns} \Phi_{\omega^*}(-P_s) \end{aligned}$$

d'après le théorème 2.4. Par suite, on a

$$(9) \qquad \sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) \exp(t\lambda(m)) = (-1)^d \sum_{s \in \mathscr{E}} \exp(tn\lambda(s)) \varepsilon(\Phi_{\omega^*}(-P_s)) .$$

Soit $\varepsilon(\Phi_{\omega^*}(P_s)) = \sum_{q=-r_s}^{+\infty} a_q^*(s) t^q$ son développement en série de Laurent. En remplaçant t par $-t$ dans (9), on obtient:

$$\sum_{m \in (nP) \cap M} \omega(m, nP) \exp(-t\lambda(m)) = (-1)^d \sum_{s \in \mathscr{E}} \exp(-tn\lambda(s)) \sum_{q=-r_s}^{+\infty} a_q^*(s) t^q .$$

D'où, en prenant le terme constant,

$$i_{\omega, P}(n) = (-1)^d \sum_{s \in \mathscr{E}} \sum_{p=0}^{r_s} a_{-p}^*(s) \frac{\lambda(s)^p}{p!} (-n)^p = (-1)^d i_{\omega^*, P}(-n)$$

d'après la fin de la preuve du théorème 3.1. □