2. G-COBORDISMES D'ACTIONS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

exemple pour le cas $n = 1$, $G = C_3$ (cyclique d'ordre 3) ou (D_3 (dihédral). On obtient alors une nouvelle action

$$G \times S^n \to S^n$$

$$(g,x) \mapsto g*x = e^{-1}(ge(x))$$

Une telle action sera dite *quasi-linéaire* (*QL*) (d'action linéaire associée α). Nous nous proposons, dans cet article, d'étudier les questions suivantes:

1) Une action *QL* est-elle toujours différentiablement conjuguée à son action linéaire associée? (C'est-à-dire, existe-t-il un difféomorphisme $h: S^n \to S^n$ tel que $g*x = h^{-1}gh(x)$)?)

2) Une action *QL* est-elle toujours topologiquement conjuguée à son action linéaire associée? (C'est-à-dire, existe-t-il un homéomorphisme $h: S^n \to S^n$ tel que $g*x = h^{-1}gh(x)$)?)

3) Toute action de G sur S^n est-elle différentiablement (ou topologiquement) conjuguée à une action *QL*?

On verra que la réponse à ces questions, pour différents n et G, est parfois positive, parfois négative et parfois ouverte et équivalente à un problème célèbre, par exemple la conjecture de Poincaré différentiable en dimension 4. Il est à remarquer que ces questions, dont l'énoncé est extrêmement élémentaire, mettent en jeu, pour leur résolution, une partie importante des grandes techniques de la topologie différentielle.

Des exemples naturels d'actions *QL* sont donnés au paragraphe 7. On en trouvera aussi dans [Ha2], paragraphe 4.

Je tiens à remercier P. Vogel et M. Rothenberg pour d'intéressantes discussions.

2. G-Cobordismes d'actions

Soit G un groupe de Lie. Nous travaillons dans la catégorie des G-variétés. Un objet de cette catégorie est une paire (V, α), où V est une variété différentiable (C^∞) et $\alpha: G \times V \to V$ est une action différentiable. Une telle acton définit (et est déterminée par) un homomorphisme $G \to \mathrm{DIFF}(V)$, où $\mathrm{DIFF}(V)$ dénote le groupe des difféomorphismes de V. Cet homomorphisme sera également dénoté par α. De ce point de vue, un morphisme de (V_1, α_1) vers (V_2, α_2) est une application différentiable $f: V_1 \to V_2$ qui est G-équivariante, ce qui peut s'écrire $f \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ f$.

Un *G-cobordisme* entre deux G-variétés (V_1, α_1) et (V_2, α_2) est une G-variété (B, β), où (B, V_1, V_2) est un cobordisme (i.e. $\partial B = V_1 \amalg V_2$) tel que la

G-action β: $Gx(B, V_1, V_2) \to (B, V_1, V_2)$ étende α_1 et α_2. Un tel cobordisme est dit *G-inversible à droite* s'il existe un G-cobordisme (C, γ) entre (V_2, α_2) et (V_1, α_1) et un G-difféomorphisme

$$h: (B \cup_{V_2} C, V_1, V_1) \to (V_1 \times [0,1], V_1 \times \{0\}, V_1 \times \{1\})$$

valant l'identité sur le bord (où $V_1 \times [0,1]$ est muni de la G-action produit).

Rappelons qu'un cobordisme (W, M, N) est un *h-cobordisme* si les inclusions $M \subset W$ et $N \subset W$ sont des équivalences d'homotopie.

Les résultats relatifs aux actions QL se déduiront du théorème suivant:

(2.1) THÉORÈME. *Une G-action α: $G \times S^n \to S^n$ est une action QL, associée à l'action linéaire α': $G \to O_{n+1}$, si et seulement si il existe un G-cobordisme (B, β) de (S^n, α') vers (S^n, α) qui est G-inversible à droite. Dans ce cas, B est toujours un h-cobordisme entre deux copies de S^n.*

Remarque. Un G-cobordisme (W, M, N) qui est un h-cobordisme (comme dans le théorème 2.1) n'est en général pas un h-cobordisme de G-variétés, notion qui conduit au théorème du s-cobordisme équivariant. Dans la définition d'un h-cobordisme de G-variétés, on demande que, pour tout sous-groupe H de G, les variétés de points fixes (W^H, M^H, N^H) soient également des h-cobordismes (voir [Ro], Section 3). Les exemples traités ci-dessous ne satisfont pas à cette condition.

Démonstration. Supposons que la G-action α soit QL. Il existe donc un plongement de G-variétés e: $(S^n, \alpha) \hookrightarrow (\mathbf{R}^{n+1}, \alpha')$ tel que $X = e(S^n)$ englobe O. En le composant au besoin avec une homothétie, on peut supposer que X englobe la sphère de rayon 1 et que X est elle-même englobée par la sphère de rayon $r > 1$. La région B_1 de $\mathbf{R}^{n+1}$ comprise entre S^n et X est un G-cobordisme (entre (S^n, α') et (X, α') qui est G-inversible à droite. En effet, son inverse est la région C_1 comprise entre X et rS^n. Soient $M(e)$ le mapping-cylindre du G-difféomorphisme e: $S^n \to X$ et $M(e^{-1})$ celui de son inverse. Le G-cobordisme (B, β) cherché de (S^n, α') vers (S^n, α) est $B = B_1 \cup M(e^{-1})$ et son inverse à droite est $C = C_1 \cup M(e)$.

Réciproquement, soit (B, β) un G-cobordisme de (S^n, α') vers (S^n, α) et (C, γ) un inverse à droite de (B, β). Il existe donc un G-difféomorphisme E de $A \cup B$ sur la G variété $(\{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid 1 \leqslant \| x \| \leqslant 2\}, \alpha')$ qui est l'identification naturelle sur les bords. La restriction e de E à $A \cap B = S^n$ donne un G-plongement de (S^n, α) dans $(\mathbf{R}^{n+1}, ')$, prouvant que α est une action QL.

Il reste à démontrer que B est un h-cobordisme. Pour cela, on démontre que B est simplement connexe et que les deux inclusions $S^n \subset B$ induisent des isomorphismes sur l'homologie entière. Ceci s'obtient en appliquant le théorème de Seifert-Van-Kampen et la suite de Mayer-Vietoris au diagramme co-cartésien

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, hook] \\ C & S^n \times [0,1] \, . \end{tikzcd}$$

(2.2) *Exemples.* Soit M^n une variété contractile dont le bord $V = \partial M$ n'est pas simplement connexe (V est une sphère d'homologie; c.f. [Ke] pour des exemples).

Soit D un n-disque compact dans int$M$ et soit $A = M - \text{int}D$. Considérons deux copies M_1 et M_2 de M et construisons la variété

$$W^{n+1} = (M_1 \times [0,1]) \quad (M_2 \times [0,1])/\{(x_1,0) = (x_2,0) | x_1 = x_2 \in A\}$$

formée de deux copies de $Mx[0,1]$ collées le long de A. La variété W, munie de l'involution échangeant (x_1,t) avec (x_2,t) est un h-cobordisme de S^n vers la variété $X = M \cup_V M$ qui est difféomorphe à S^n si $n \geqslant 5$, par le théorème du h-cobordisme. Le même théorème montre que (W, X, S^n) est le C_2-inverse à droite de (W, S^n, X) (car $A \cup_V A = S^{n-1} \times [0,1]$). L'involution sur X est donc QL par le théorème 2.1, associée à la réflexion par rapport à un hyperplan. Mais ces deux involutions ne sont pas topologiquement conjuguées puisque leurs espaces de points fixes (S^{n-1} et V) ne sont pas homéomorphes. (voir fig. 2)

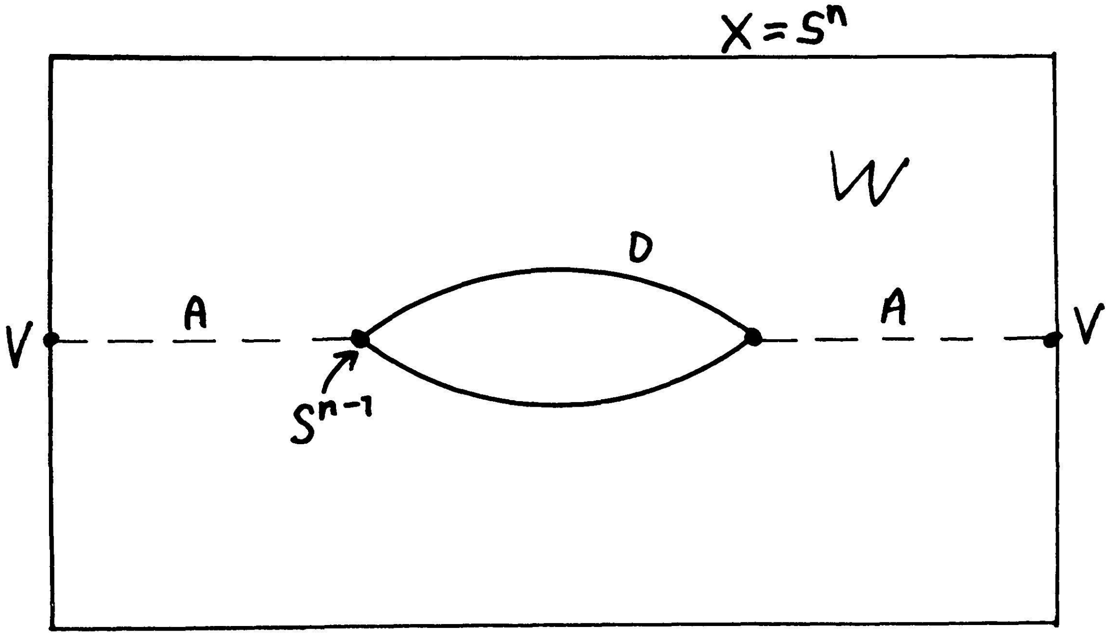

FIGURE 2