5. Randwinkel

5. RANDWINKEL

Sei $\psi \in W_{\text{Koh}}$ und $e \in E_{\text{Rand}}$ eine Randecke. Dann ist

$$\rho(\psi, e) = \sum_{s \in S} (e, s)\psi(s) \geqslant 0$$

der Randwinkel von von ψ an der Ecke e. Es gilt:

$$\sum_{s \in S} \psi(s) = \pi(\#\Delta) = 2\pi(\#E_{\text{In}}) + \sum_{e \in E_{\text{Rand}}} \rho(\psi, e)$$

Aus $\#\Delta - \#K + \#E = 1$ folgt:

$$- 2\pi = \pi(\underbrace{-1 + 2\#\Delta - \#E_{\text{In}}}_{= -1 + \#K} - \#K) = \pi(\#\Delta - \#E - \#E_{\text{In}})$$

$$= \sum_{e \in E_{\text{Rand}}} (\rho(\psi, e) - \pi)$$

und somit erhalten wir eine Version von Gauss-Bonnet:

$$2\pi = \sum_{e \in E_{\text{Rand}}} (\pi - \rho(\psi, e))$$

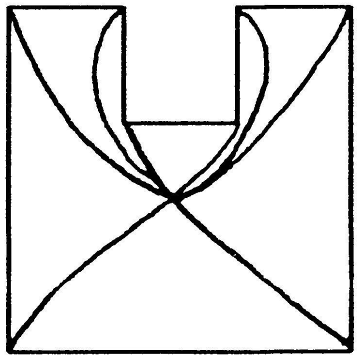
5.1. POLYEDER MIT FESTEN RANDWINKELN. Die Funktion $\rho: E_{\text{Rand}} \mapsto \mathbf{R}_+$ ist ein *Randwinkelsystem,* wenn gilt

$$2\pi = \sum_{e \in E_{\text{Rand}}} (\pi - \rho(e)) .$$

Ist ρ ein Randwinkelsystem, dann ist

$$W^{\rho}_{\text{Koh}} := \{\psi \in W_{\text{Koh}} \mid \rho(\psi, e) = \rho(e) , \quad \forall e \in E_{\text{Rand}}\} .$$

Obwohl nach dem Satz von Fary die Menge $\overset{\circ}{W}_{\text{Koh}}$ nicht leer ist, kann $\overset{\circ}{W}{}^{\rho}_{\text{Koh}}$ durchaus leer sein. Die Triangulation von Figur 12 etwa kann nicht geradlinig realisiert werden, wenn wir die Randwinkel fest lassen.



FIGUR 12

5.2. SATZ. *Sei* $\rho : E_{\mathrm{Rand}} \mapsto \mathbf{R}_+$ *ein Randwinkelsystem und sei* $\overset{\circ}{W}{}^{\rho}_{\mathrm{Koh}}$ *nicht leer. Dann gibt es genau eine immersierte Kreispackung* $\eta \in W^{\rho}_{\mathrm{Koh}}$. *Das Polyeder* P_η *ist in* $\mathbf{E}$ *eingebettet, wenn* $\rho(e) \leqslant \pi, \forall e \in E_{\mathrm{Rand}}$.

Beweis. Der Raum W^{ρ}_{Koh} ist eine kompakte, konvexe Teilmenge von W. Für $\psi \in \overset{\circ}{W}{}^{\rho}_{\mathrm{Koh}}$ ist sein Tangentialraum $T_\psi W^{\rho}_{\mathrm{Koh}}$ unabhängig von ψ. Es gilt:

$$T_\psi W_{\mathrm{Koh}} = \left\{ v \in \mathbf{R}^S \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sum\limits_{s \in S} (d, s) v(s) = 0, & \forall d \in \Delta \\ \text{und} & \\ \sum\limits_{s \in S} (e, s) v(s) = 0, & \forall e \in E \end{array} \right\} \tag{8}$$

Nach Lemma 2.3. hat W^{ρ}_{Koh} die Dimension $1 + 2 \# \Delta - \# E = \# K_{\mathrm{In}}$, wobei die letzte Gleichheit wieder mit Induktion über die Anzahl Dreiecke folgt.

Für jede innere Kante k ist der Vektor t_k Tangentialvektor von W^{ρ}_{Koh}. Nach Lemma 2.5. spannen diese den Tangentialraum $T_\psi W^{\rho}_{\mathrm{Koh}}$ auf.

Sei L^{ρ}_{Koh} die Einschränkung von L auf W^{ρ}_{Koh}. Dann hat wegen Lemma 3.4. die konkave Funktion L^{ρ}_{Koh} genau einen kritischen Punkt η. Da $(DL_{\mathrm{Koh}})_\eta(t_k) = 0, \ \forall k \in K_{\mathrm{In}}$, ist η wegen Lemma 4.3. eine immersierte Kreispackung. □

LITERATUR

[An] ANDREEV, E. M. On convex polyhedra in Lobacevskii spaces. *Mat. USSR Sbornik 10* (1970), 413-440.

[Cv1] COLIN DE VERDIÈRE, Yves. Un principe variationnel pour les empilements de cercles. *Inventiones math. 104* (1991), 655-669.

[Cv2] —— Comment rendre géodésique une triangulation d'une surface. *Enseignement Math. 37* (1991), 201-212.

[Fa] FARY, I. On straight line representation of planar graphs. *Scientiarium Mathematicarum (Acta Universitatius Szegedensis) 11* (1946-1948), 229-233.

[Mi] MILNOR, J. W. Hyperbolic geometry: the first 150 years. *Bull. A.M.S. 6* (1982), 9-24.

[Tu] THURSTON, William P. *The Geometry and Topology of Three-Manifolds.* Princeton Notes (1978), chap. 13.

(Reçu le 18 mars 1991)

Walter Brägger

Mathematisches Institut
Rheinsprung 21
CH-4051 Basel