

COMMENT RENDRE GÉODÉSIQUE UNE TRIANGULATION D'UNE SURFACE?

Autor(en): **de Verdière, Yves Colin**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-58738>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

COMMENT RENDRE GÉODÉSIQUE UNE TRIANGULATION D'UNE SURFACE ?

par Yves COLIN DE VERDIÈRE

RÉSUMÉ. On montre que toute triangulation d'une surface compacte à courbure négative ou nulle est rendue géodésique par minimisation de l'énergie et un résultat analogue pour les polygones convexes du plan. On obtient ainsi des analogues discrets naturels de théorèmes connus pour les applications harmoniques de surfaces (Kneser-Choquet, Jost-Schoen) et une extension de résultats de Tutte.

Etant donnée une surface compacte X munie d'une métrique riemannienne g , on appelle *triangulation* (topologique) de X , la donnée d'un *complexe simplicial* X_0 , d'un homéomorphisme Φ_0 de X_0 sur X dont la restriction φ_0 au 1-squelette Γ_0 de X_0 soit un plongement C^1 -par morceaux. On dira que la *triangulation est géodésique* si les images des arêtes de Γ_0 par φ_0 sont des arcs de géodésiques pour la métrique g .

Le problème que nous étudions est le suivant: peut-on déformer une triangulation d'une surface de façon à la rendre géodésique?

La réponse est connue dans le cas euclidien par Fary [FY], Tutte [TU]. La méthode employée par Tutte est proche de la nôtre mais utilise directement le critère de planarité de Kuratowski. Un argument global de courbure totale (Gauss-Bonnet) associé à une étude complète des problèmes de dégénérescence permet de donner une méthode géométrique directe qui marche sous la seule hypothèse de courbure ≤ 0 . L'idée est de considérer chaque arête comme un élastique avec une constante de couplage arbitraire: la position d'équilibre, minimum de l'énergie potentielle, de ce filet élastique donne une solution.

Si on note A l'ensemble des arêtes de Γ_0 et qu'on introduit, sur chaque arête $(i, j) \in A$, un paramètre $s \in [0, 1]$, on note, pour toute application $\varphi: \Gamma_0 \rightarrow X$, et pour tout $c = (c_{i,j}) \in (\mathbf{R}^+ \setminus 0)^A$, $E_c(\varphi)$ l'énergie de φ donnée par:

Mots clés: triangulation, calcul des variations.

Codes AMS: 05C10, 53C22, 57M20, 57R05, 57R40, 58E10, 58E20.

$$E_c(\varphi) = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in A} c_{i,j} \int_0^1 \|\dot{\varphi}_{i,j}(s)\|^2 ds,$$

où $\varphi_{i,j}$ est la restriction de φ à l'arête (i, j) et $\dot{\varphi}_{i,j}$ désigne la dérivée par rapport à s .

On souhaite montrer, que sous des hypothèses convenables, si φ minimise E_c dans la classe d'homotopie d'une triangulation topologique donnée φ_0 , alors φ est la restriction à Γ_0 d'une triangulation géodésique isotope à la triangulation initiale. On a également des résultats dans le cas des variétés à bord en supposant le bord de la triangulation fixé sur un polygone convexe.

THÉORÈME 1. *Dans la classe d'homotopie de φ_0 , il existe, pour chaque choix de c , une application φ minimisant E_c . De plus, si la courbure de g est négative ou nulle, φ est essentiellement unique, au sens que, si φ_1 et φ_2 sont 2 minimas homotopes, ils le sont par φ_t qui est une courbe de minimas telle que la région balayée par l'image de φ_t est plate et que $\partial\varphi_t/\partial t$ est un champ de vecteurs constant le long de chaque image $\varphi_t(\Gamma_0)$: en particulier les images de Γ_0 par les φ_t sont isométriques. Si la courbure est < 0 , on a unicité.*

Le résultat principal est alors le:

THÉORÈME 2. *Si (X, g) est à courbure de Gauss ≤ 0 , toute φ minimisant E_c est un plongement géodésique de Γ_0 qui admet un prolongement (unique à isotopie près) en une triangulation de X isotope à Φ_0 .*

Nous énonçons maintenant une version à bord: X est un polygone géodésique strictement convexe d'une surface 1-connexe à courbure ≤ 0 . On se donne une triangulation Φ_0 de X , telle que le bord de X_0 soit un cycle $(1, 2, \dots, N)$, que Φ_0 envoie les sommets de ce cycle sur les sommets du polygone (dans le même ordre) et les arêtes $(i, i+1)$ ($1 \leq i \leq N$) sur les côtés de X (avec la convention habituelle $N+1 = 1$).

On a alors le:

THÉORÈME 3. *Pour tout choix de $c \in (\mathbf{R}^+ \setminus 0)^A$ (où A désigne maintenant les arêtes intérieures de X_0), il existe un φ unique minimisant E_c à bord fixé et ce φ est la restriction à Γ_0 d'une triangulation géodésique de X isotope à Φ_0 .*

Ce dernier théorème contient comme cas particulier un résultat de Tutte ([TU]) concernant le cas euclidien: il considère le plongement barycentrique qui correspond au cas où tous les $c_{i,j}$ valent 1.

Les résultats précédents sont des analogues discrets des théorèmes de Kneser-Choquet ([CH], [KN]) pour le cas des polygones et Jost-Schoen ([J-S]) pour les surfaces compactes.

Nous avons été motivé au départ par le problème rencontré dans [CV2] de construire des systèmes d'angles cohérents pour une triangulation. Les théorèmes précédents donnent une construction directe de tels systèmes.

Questions. Il serait intéressant de comprendre directement le cas de la sphère où le minimum de l'énergie est obtenu pour φ constante: toute triangulation y est homotope à une application constante; il est probable qu'il y a dans ce cas des minimas locaux qui donnent lieu à des triangulations géodésiques:

Le cas des graphes infinis doit pouvoir être traité de façon analogue en considérant des applications d'énergie minimale avec une condition de Dirichlet à l'infini (voir à ce sujet [TO1] et [TO2]).

Nos théorèmes donnent immédiatement l'existence de plongements géodésiques de tout sous-graphe d'une triangulation, par exemple un graphe 2-cellulaire, i.e. dont les composantes connexes du complémentaire sont des disques.

Il serait souhaitable de comprendre quelles sont les configurations possibles d'une application φ d'énergie minimale dans une classe d'homotopie contenant un plongement: une telle application peut ne pas être un plongement. Y-a-t-il alors pour l'image du graphe par φ d'autres possibilités que d'être un point ou une géodésique fermée (cas d'une triangulation d'un petit voisinage tubulaire d'une telle géodésique)?

1. PREUVE DU THÉORÈME 1

Pour prouver l'existence, il suffit d'adapter une preuve de l'existence de géodésiques périodiques dans toute classe d'homotopie d'applications du cercle S^1 dans X ([KG] p. 35).

On peut aisément définir l'espace de Sobolev $H^1(\Gamma_0, X)$, qui est le sous-espace des applications continues de Γ_0 dans X , formé des applications dont la restriction à chaque arête (i, j) est d'énergie $\int_0^1 \|\dot{\phi}_{i,j}(s)\|^2 ds$ finie. Les classes d'homotopie sont alors des fermés de cet espace.

Montrons que la fonctionnelle E_c atteint son minimum sur $H^1(\Gamma_0, X)$: cela résulte classiquement de la compacité des ensembles $E_c \leq M$ pour la topologie de la convergence uniforme (Ascoli: $d(\varphi_{i,j}(s), \varphi_{i,j}(s')) \leq C^{te} \cdot \sqrt{|s' - s|}$) et de la semi-continuité inférieure de E_c pour cette topologie.

Si on a 2 solutions, soient φ_1 et φ_2 , on peut rendre l'homotopie entre elles géodésique, au sens que pour chaque t , la restriction de φ_t aux arêtes de Γ_0 est géodésique et que, pour tout sommet i de Γ_0 , l'application $t \rightarrow \varphi_t(i)$ est géodésique. $E_c(\varphi_t)$ est alors convexe pour $t \in [1, 2]$ dès que la courbure de X est ≤ 0 ; en effet, si $V_{i,j} = \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial t}$, $T = \frac{\partial \varphi_{i,j}}{\partial s}$ et K_g est la courbure sectionnelle, on a la formule de variation seconde:

$$\frac{d^2 E_c}{dt^2} = \sum_{(i,j) \in A} c_{i,j} \int_0^1 (\| \nabla_T V_{i,j} \|^2 - K_g(\varphi_{i,j}(s)) | (V_{i,j})_{norm} |^2) ds ,$$

où $(V_{i,j})_{norm}$ est la composante normale à T de $V_{i,j}$.

On en déduit que $E_c(\varphi_t)$ est constante, ainsi que les longueurs des images par φ_t des arêtes de Γ_0 (somme constante de fonctions convexes), puis le résultat annoncé: la distance entre 2 points parcourant à vitesse constante 2 géodésiques ne pouvant être constante que si la région balayée est plate et les 2 géodésiques *parallèles* et parcourues à la même vitesse.

Remarquons aussi que les extrémums de E_c sont caractérisés par le fait que les $\varphi_{i,j}$ sont des arcs géodésiques paramétrés proportionnellement à la longueur et qu'on a

$$\forall i, \quad \sum_{(i,j) \in A} c_{i,j} \dot{\varphi}_{i,j}(0) = 0 ,$$

où $\varphi_{i,j}$ est supposée telle que $\varphi_{i,j}(0) = \varphi(i)$.

2. PREUVE DU THÉORÈME 2

Dans ce §, φ est donnée minimisant E_c dans la classe d'homotopie de φ_0 . Pour tout triangle T de X_0 , la restriction de φ au bord de T est homotope à 0 et donc se relève en un $\tilde{\varphi}$ dans le revêtement universel \tilde{X} de X , unique à automorphisme près du revêtement. L'image $\tilde{\varphi}(\partial T)$ est le bord d'un triangle T_φ (éventuellement dégénéré) de \tilde{X} . On prolonge φ à X_0 en Φ de façon que, pour tout triangle T , on ait $\Phi(T) = \pi(T_\varphi)$, où π est la projection canonique

de \tilde{X} sur X et que Φ soit un homéomorphisme local de T sur $\Phi(T)$ si ce triangle n'est pas dégénéré.

2.a. COURBURE

On attribue à chaque angle de chaque triangle de X_0 une mesure α avec $0 \leq \alpha \leq \pi$ qui est celle de l'angle correspondant dans T_φ de façon compatible avec la dégénérescence éventuelle de T_φ : si les 3 sommets de T_φ sont confondus, les α sont arbitraires de somme π . Si le triangle est plat sans côtés de longueur nulle, 2 des α valent 0, le 3^e π , si le triangle a un côté de longueur nulle prendre les angles ayant ce côté avec la valeur $\frac{\pi}{2}$, etc.

On définit alors la courbure K_φ de chaque sommet i par $K_\varphi(i) = 2\pi - \sum_i \alpha$, où \sum_i désigne la somme sur les angles de sommet i .

La formule de Gauss-Bonnet donne, en notant par K_g la courbure de Gauss de (X, g) :

$$\sum_i K_\varphi(i) + \sum_T \int_{T_\varphi} K_g = 2\pi\chi(X) ;$$

en effet, pour un triangle non dégénéré, on a par Gauss-Bonnet pour un triangle géodésique que l'intégrale de la courbure vaut la somme des angles diminuée de π , alors que pour un triangle dégénéré cette intégrale vaut 0 et par la convention précédente la somme des angles vaut π . Sommant ces égalités sur tous les triangles et utilisant la relation d'Euler $\chi(X) =$ nombre de sommets $-$ nombre d'arêtes $+$ nombre de faces, et le fait que pour une triangulation le nombre de faces vaut les $\frac{2}{3}$ du nombre d'arêtes, on conclut facilement.

Comme Φ est homotope à Φ_0 , elle est de degré 1 et l'on en déduit qu'elle est surjective. Comme X est à courbure négative ou nulle et que $\int_X K_g = 2\pi\chi(X)$, on a

$$(1) \quad \sum_i K_\varphi(i) \geq 0 .$$

2.b. DÉGÉNÉRESCENCE PONCTUELLE

Soit X_1 un sous-complexe connexe complet maximal de X_0 tel que la restriction de Φ à X_1 soit constante, alors:

LEMME. X_1 est simplement connexe.

Preuve. D'abord il est clair que X_1 ne contient pas de lacets de X non homotopes à 0, car un tel lacet deviendrait par φ homotope à 0.

De plus, si X_1 n'était pas 1-connexe, on pourrait diminuer E_c en appliquant la partie de X_0 intérieure à X_1 sur le même point de X que $\varphi(X_1)$. \square

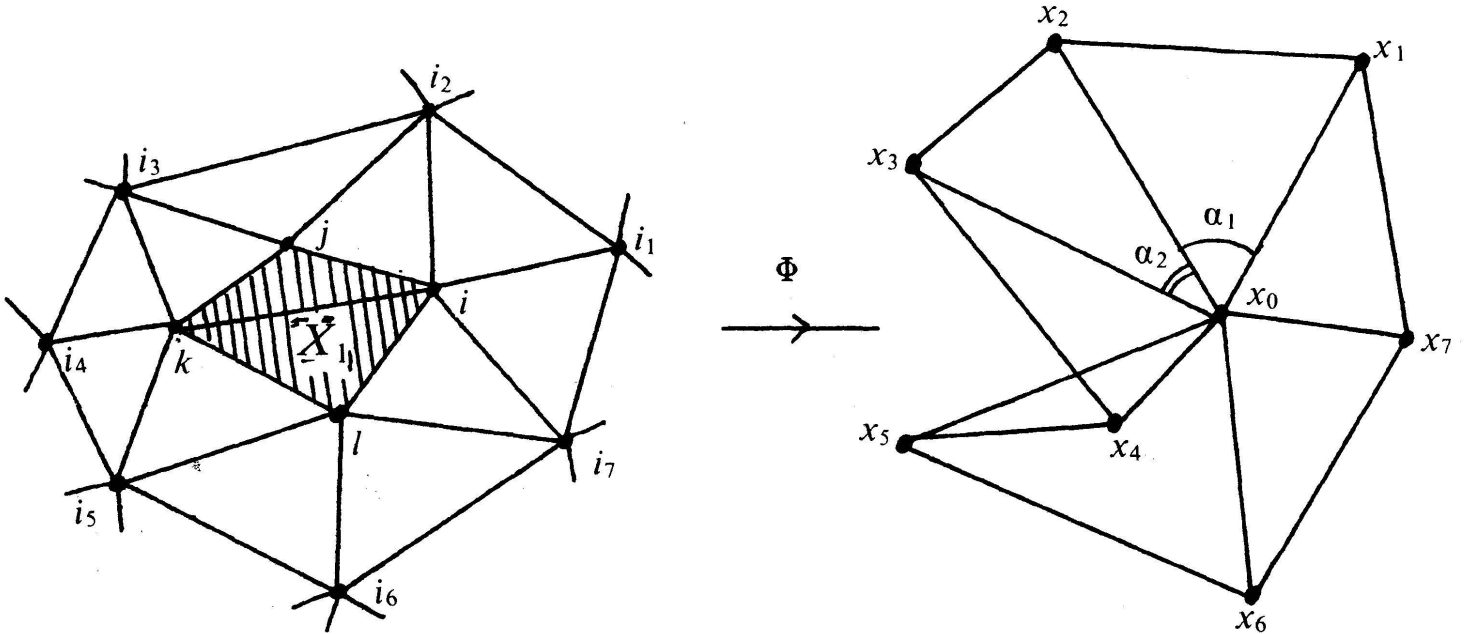


FIGURE 1

Soit (i_1, i_2, \dots, i_m) (fig. 1) le cycle des sommets de X_0 entourant X_1 , $x_0 = \varphi(X_1)$, $x_l = \varphi(i_l)$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ les mesures des angles de sommet i dans X_1 et de côtés $(i, i_l), (i, i_{l+1})$. Si on pose

$$K_\varphi(X_1) = 2\pi - \sum_{l=1}^{l=m} \alpha_l,$$

la formule de Gauss-Bonnet implique

$$K_\varphi(X_1) = \sum_{i \text{ sommet de } X_1} K_\varphi(i).$$

Soit u_l le vecteur unitaire tangent en x_0 à l'arc géodésique orienté image par φ d'une arête (i, i_l) (i sommet de X_1). Le fait que φ soit critique pour E_c implique l'existence de constantes $C_l > 0$ telles que:

$$\sum_{i=1}^{i=m} C_l u_l = 0.$$

Il est donc impossible que $K_\varphi(X_1)$ soit > 0 ; en effet alors l'image par φ du cycle (i_1, i_2, \dots, i_l) n'entourerait pas x_0 et donc les vecteurs u_i seraient tous dans un demi-plan strict de l'espace tangent en x_0 à X (une application continue du cercle dans lui-même qui n'est pas surjective est telle que tout point non extrémité de l'image est l'image d'au moins deux points). La relation (1) implique alors que $K_\varphi(X_1) = 0$, car l'ensemble des sommets de X est la réunion des sommets des complexes X_1 (éventuellement réduits à un point).

Montrons maintenant que la seule possibilité pour X_1 est d'être un sous-graphe linéaire de sommets consécutifs (j_1, j_2, \dots, j_k) tel que l'image des triangles de X_0 ayant au moins un sommet dans X_1 par φ soit un segment géodésique contenant x_0 comme point intérieur (fig. 2).

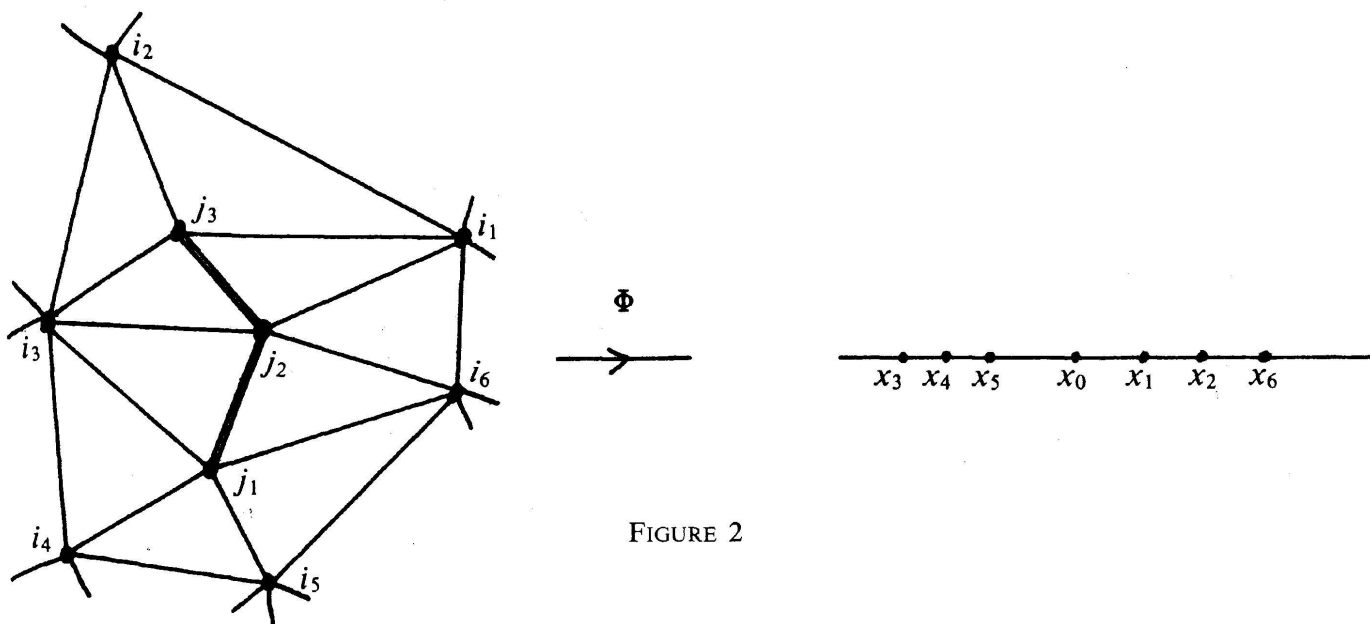


FIGURE 2

En effet, appelons *extrémal* tout sommet i de X_1 tel que les cônes tangents en i à X_0 et $X_0 \setminus X_1$ soient connexes et non vides (fig. 3). Alors, on voit

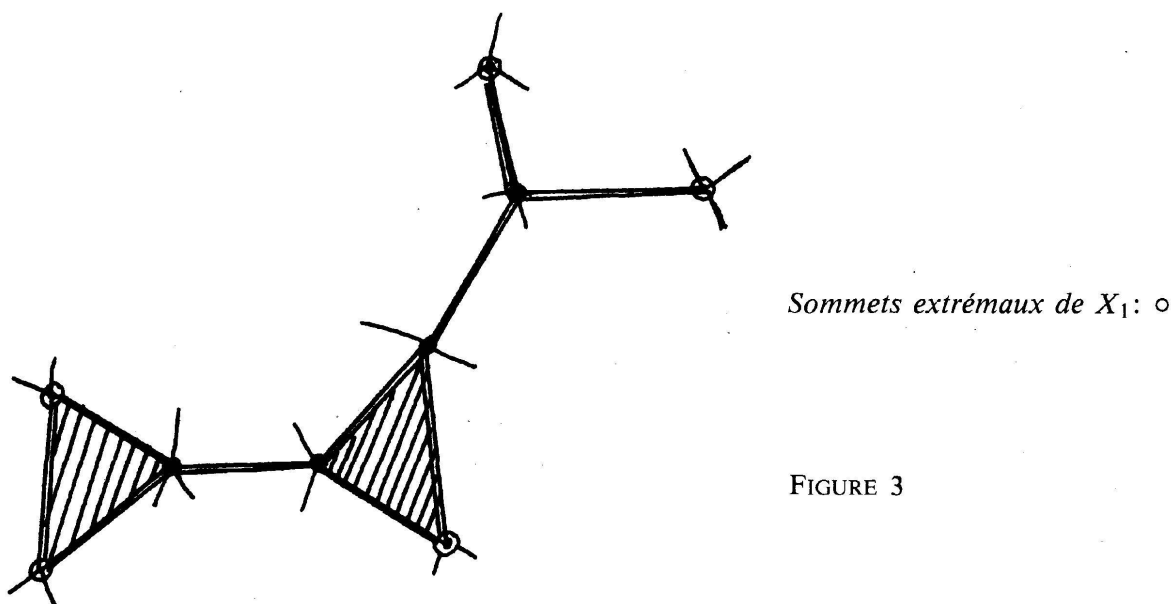


FIGURE 3

que X_1 admet au moins 3 sommets extrémaux s'il n'est pas un graphe linéaire. Montrons que la somme des angles α_i extérieurs à X_1 ayant pour sommet un tel point extrémal est $\geq \pi$: en effet dans le cas contraire les vecteurs u_i correspondants seraient dans un demi-plan strict. Comme la somme totale des α_i est 2π , on en déduit le résultat annoncé: il y a au plus 2 sommets extrémaux et donc X_1 est linéaire. Si X_1 n'est pas réduit à un sommet unique, il est clair que la condition d'extréma pour E_c implique que les vecteurs u_i issus des extrémités sont alignés et non tous de même orientation. Les α_i correspondant aux autres sommets de X_1 sont alors nuls, puisque la somme totale est 2π .

On voit ainsi que la courbure $K_\varphi(i)$ est nulle pour tous les sommets de X_0 , car les complexes X_1 sont soit réduits à un point, soit des sous-graphes linéaires et dans ce dernier cas, c'est clair que la courbure K_φ est nulle en chaque sommet de X_1 . On note que tous les triangles qui ont un sommet au moins dans X_1 sont dégénérés.

2.c. DÉGÉNÉRESCENCE LINÉAIRE

2.c1. Soit X_2 un sous-complexe connexe complet maximal de X_0 tel que les images par φ des triangles de X_2 soit dégénérés. D'après ce qui précède les arêtes issues d'un sommet de ∂X_2 ont des images par φ non réduites à un point: les seuls « X_1 » possibles sont intérieurs à des « X_2 ».

Alors on a le:

LEMME. X_2 est soit 1-connexe, soit contractible sur une courbe de X_0 non homotope à 0. Dans le premier cas, l'image par φ de X_2 est un segment de géodésique, dans le second, c'est une géodésique périodique.

Preuve. Il est clair d'après ce qui précède que l'image de X_2 par Φ est un arc complet d'une géodésique de X .

En effet si 2 triangles dégénérés ont un côté non réduit à un point en commun ils sont alignés, il en est de même d'après le paragraphe précédent s'ils ont un côté réduit à un point.

Les composantes connexes de $X_0 \setminus X_2$ ne sont pas des disques topologiques car le bord de ce disque ayant une image géodésique, on peut diminuer E_c en projetant orthogonalement le disque sur cette géodésique (le faire dans le revêtement universel).

Si maintenant X_2 n'est pas un disque, les composantes connexes du bord ne sont pas homotopes à 0, mais sont homotopes entre elles dans X , sinon l'image par φ ne pourrait être une seule géodésique.

On en déduit que X_2 est soit un disque, soit un cylindre, soit un ruban de Möbius. On élimine aussi facilement le cas où $X_2 = X$. \square

2.c2. Cas où X_2 est un disque

Dans ce cas la formule de Gauss-Bonnet donne:

$$\sum_{i \in \partial X_2} (\sum_i \alpha_{ext} - \pi) = 2\pi,$$

où $\sum_i \alpha_{ext}$ est la somme des mesures des angles extérieurs à X_2 au sommet i de ∂X_2 .

De plus cette somme \sum_i ne peut valoir que 0 , π ou 2π , car les angles intérieurs valent tous 0 ou π et la courbure K_φ est 0 .

Le cas 0 est impossible car alors les triangles extérieurs de sommet i seraient dégénérés et donc feraient partie de X_2 . On voit donc qu'il y a exactement 2 sommets de ∂X_2 où cette somme vaut 2π et les autres où elle vaut π . Montrons qu'il n'y a pas de sommets de cette sorte:

c'est clair car les arêtes extérieures en i sont situées dans un demi-espace, ce qui est impossible (condition d'extrémas), sauf si elles sont alignées avec $\varphi(\partial X_2)$ auquel cas elles ne sont pas extérieures.

On en conclut que le bord de X_2 n'a que 2 sommets, ce qui est incompatible avec le fait que X_0 est un complexe simplicial: il n'y a pas 2 arêtes qui ont les mêmes extrémités.

2.c3. Cas où X_2 est un cylindre ou un ruban de Möbius

La même technique que précédemment s'étend sans difficultés.

On a donc montré que tous les triangles $\Phi(T)$ sont non dégénérés.

2.d. FIN DE LA PREUVE

Il est maintenant clair que Φ est un homéomorphisme local à l'intérieur des triangles de X_0 , il reste à voir que c'est vrai près des sommets et comme Φ est de degré 1, on en déduit que c'est un homéomorphisme global.

Comme $K_\varphi(i)$ est nul, la seule possibilité pour que Φ ne soit pas un homéomorphisme local en i est que l'image des triangles de sommet i soit contenue dans un angle d'ouverture $\leq \pi$. C'est impossible car toutes les arêtes issues de i devraient avoir une image alignée et donc les triangles de sommet i seraient dégénérés.

3. PREUVE DU THÉORÈME 3

Le théorème 3 se prouve par des modifications simples de la preuve du théorème 2. Nous préférons indiquer une preuve rapide qui donne le résultat pour un c générique.

Cette preuve suppose une hypothèse d'analyticité, aussi nous limiterons-nous au cas où la métrique riemannienne de X est euclidienne: X est un polygone strictement convexe du plan euclidien.

Cette preuve s'appuie sur le théorème de Whitney-Menger ([BE] p. 199, [W]).

Un graphe est dit 3-connexe si on ne le déconnecte pas en ôtant 2 sommets arbitraires. Le 1-squelette d'une triangulation d'une surface est 3-connexe.

THÉORÈME. *Dans un graphe 3-connexe, 2 sommets disjoints peuvent être joints par 3 chemins sans points communs.*

Prouvons maintenant le théorème 3 pour un c générique; il est clair qu'il suffit de prouver que les triangles $\Phi(T)$ image des triangles de X_0 sont non dégénérés, car l'argument de courbure donne ensuite le résultat final comme dans le §2.

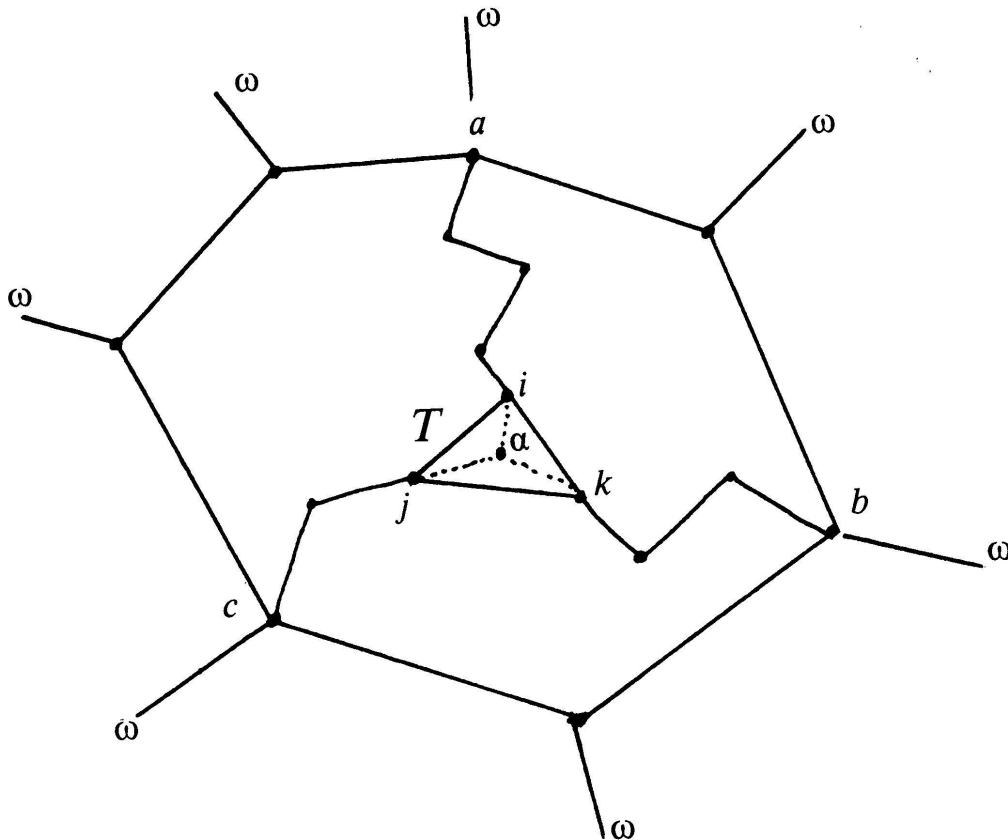


FIGURE 4

Montrons que pour tout T , l'ensemble Ω_T des c pour lesquels $\Phi(T)$ est non dégénéré est un ouvert dense:

c 'est un ouvert (dépendance continue de φ par rapport à c). Le complémentaire de cet ouvert est donné par des relations algébriques, car le système d'équations donnant les coordonnées des images par φ des sommets est un système linéaire dont les coefficients sont les $c_{i,j}$.

Il suffit de montrer que cet ouvert est non vide. Par le théorème de Whitney-Menger, il y a dans Γ_0 3 chemins sans points communs joignant les 3 sommets i, j, k de T à 3 points a, b, c du bord de X_0 (fig. 4). Il suffit d'appliquer le théorème au graphe obtenu en ajoutant à Γ_0 2 sommets, un α dans T avec 3 arêtes le joignant aux 3 sommets de T et un ω joint par des arêtes à chaque sommet du bord de X_0 . On applique le théorème aux sommets α et ω .

On considère maintenant les coefficients c tels que les coefficients des arêtes des 3 chemins tendent vers $+\infty$, les autres restant fixés. A la limite les images des sommets i, j, k de T vont coïncider avec les images de a, b, c qui sont 3 sommets distincts du bord de X ; le triangle $\Phi(T)$ sera donc non dégénéré.

Maintenant l'ouvert $\Omega = \bigcap_T \Omega_T$ est une intersection finie d'ouverts denses, donc lui-même un ouvert dense. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [BE] BERGE, C. *Graphes et hypergraphes*. Dunod, 1973.
- [CH] CHOQUET, G. Sur un type de transformation analytique... défini au moyen de fonctions harmoniques. *Bull. Sci. Math. (2)* 69 (1945), 156-165.
- [CV1] COLIN DE VERDIÈRE, Y. Empilements de cercles: convergence d'une méthode de points fixe. *Forum math. 1* (1989), 395-402.
- [CV2] — Un principe variationnel pour les empilements de cercles. *Invent. Math.* 104, (1991), 655-669.
- [FY] FARY, I. On straight line representation of planar graphs. *Acta Sci. Math. Szeged 11* (1948), 229-233.
- [J-S] JOST, J. and R. SCHOEN. On the existence of harmonic diffeomorphisms between surfaces. *Invent. Math.* 66 (1982), 353-359.
- [KG] KLINGENBERG, W. *Lectures on closed geodesics*. Grundlehren der Math. Wissens. (Springer), 1978.
- [KN] KNESER, H. Lösung der Aufgabe 41. *Jahr. Deutsch. Math. Ver.* 35 (1926), 123-124.

- [TO1] THOMASSEN, C. Planarity and duality of finite and infinite graphs. *Journal of Comb. theory B*, 29 (1980), 244-271.
- [TO2] ——— Plane representations of graphs. In *Progress in graph theory*, Academic press (1984), 43-69.
- [TU] TUTTE, W. How to draw a graph. *Proc. London Math. Soc.* 13 (1963), 743-768.
- [W] WHITNEY, H. Congruent graphs and the connectivity of graphs. *Am. J. of Math.* 54 (1932), 150-168.

(Reçu le 17 décembre 1990)

Yves Colin de Verdière

Institut Fourier

B.P. 74

38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex

(France)