5. Quelques corollaires du Théorème

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

5. Quelques corollaires du Théorème

Les trois premiers corollaires sont quasiment immédiats. Le premier est un résultat assez connu de Tits ([T3], 3.4 et 2.3.6); les deux suivants sont dûs à Nebbia ([N2], Théorème 2 et Remarque 3, p. 375).

Corollaire 1. *Soient X un arbre, et G un sous-groupe de* Aut X *contenant un sous-groupe résoluble d'indice fini. Alors G fixe un sommet, ou une arête, ou un bout, ou une paire de bouts de X.*

Preuve. Vu les hypothèses, G ne peut contenir de sous-groupe libre non abélien. Le résultat provient alors de l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) du Théorème, vraie sans hypothèse de locale finitude de X (voir la remarque 1 du §2).

Corollaire 2. *Soit X_N l'arbre homogène de degré N, où tout sommet a exactement N voisins $(3 \leqslant N < \infty)$; soit G un sous-groupe de* Aut X_N *agissant transitivement sur X_N. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *G fixe un bout de X_N;*

(ii) *L'adhérence $\bar{G}$ de G dans* Aut X_N *est moyennable.*

Preuve. Comme G agit transitivement, G ne peut fixer aucun sommet, aucune arête, et aucune paire de bouts de X_N (on utilise $N \geqslant 3$ pour ce dernier point). L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (iv) du Théorème permet de conclure.

Corollaire 3. *Soient X un arbre localement fini, et G un sous-groupe* fermé *de* Aut X. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *G n'est pas moyennable;*

(ii) *G contient un sous-groupe discret qui est libre non abélien.*

Preuve. Immédiate.

Nous mentionnons le corollaire 3 du fait de ses liens avec un problème classique: si $\mathscr{C}$ est une classe de groupes localement compacts, la non-moyennabilité d'un groupe G de $\mathscr{C}$ est-elle due à la présence dans G d'un sous-groupe discret qui est libre non abélien? Une conjecture fort répandue sous le nom de «conjecture de von Neumann»[6]) affirmait que la réponse devait être affirmative pour la classe $\mathscr{C}$ des groupes discrets: rappelons que Ol'shanskii [Ol] a donné les premiers exemples de groupes discrets qui

[6]) Nous n'avons trouvé dans l'article «*Zur allgemeinen Theorie des Masses*» de von Neumann [vN], qu'un seul passage qui semble se rapporter au problème qui nous occupe. Au §4 de son *Einleitung,* von Neumann énonce quatre principes générateurs pour la classe des groupes moyennables discrets: il s'agit de la version discrète des principes MOY A,

montrent que la réponse est négative pour cette classe; plus récemment Gromov a construit une infinité non dénombrable de tels exemples (voir [Gr], Corollary 5.5.E; [GH], Théorème 7 du Chapitre 12). Par contre, la réponse au problème est affirmative pour la classe $\mathscr{C}$ des groupes discrets linéaires: c'est une conséquence banale du théorème de Tits mentionné tout au début du présent article. Comme autre résultat positif, citons la réponse affirmative au problème pour la classe $\mathscr{C}$ des groupes localement compacts presque connexes (c'est-à-dire dont le quotient par la composante connexe du neutre est compact): c'est un résultat de Rickert [Ri] (voir aussi la page 132 de [H1] pour le cas des groupes de Lie presque connexes). Le corollaire 3 ci-dessus montre que la réponse au problème est encore affirmative pour la classe $\mathscr{C}$ des sous-groupes fermés des groupes d'automorphismes d'arbres localement finis.

COROLLAIRE 4. *Soient X un arbre, et G un sous-groupe de* $\mathrm{Aut}\, X$. *On suppose que G n'a qu'un nombre fini d'orbites sur les sommets de X, et que tout sommet de X a un stabilisateur fini dans G. On a alors l'alternative suivante: ou bien G est fini, ou bien G contient un sous-groupe cyclique infini d'indice fini, ou bien G contient un sous-groupe libre non abélien.*

Preuve. Supposons que G ne contienne pas de sous-groupe libre non abélien. L'implication (i) ⇒ (ii) du Théorème (vraie sans hypothèse de locale finitude de X) conduit à considérer quatre cas, comme au §4 ci-dessus.

— *G fixe un sommet x:* Alors le groupe G et l'arbre X sont finis, comme conséquences immédiates des hypothèses.

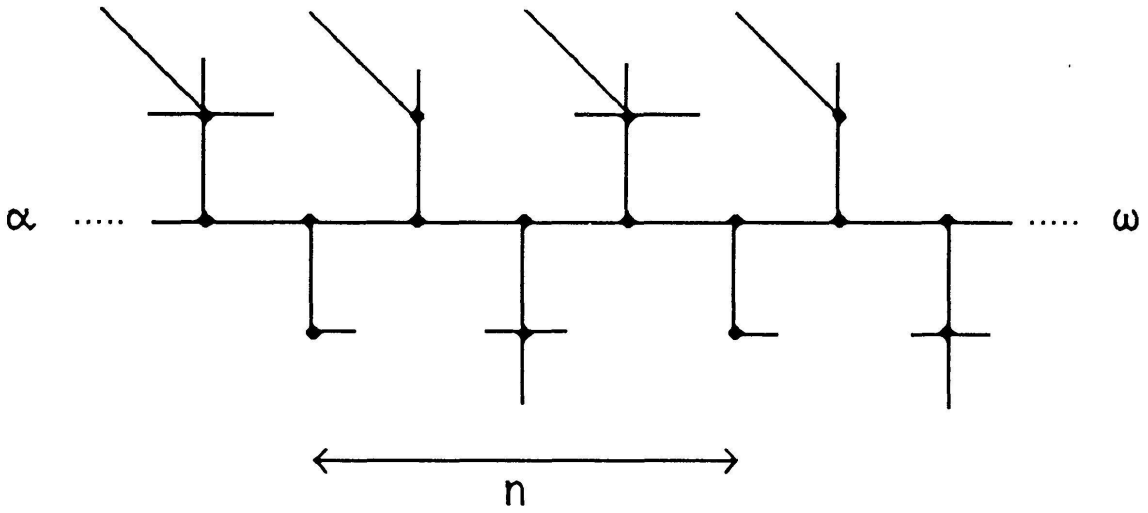
— *G fixe une arête $[x, y]$:* Le sous-groupe $G \cap (\mathrm{Aut}\, X)_x \cap (\mathrm{Aut}\, X)_y$ est alors d'indice 1 ou 2 dans G, et est justiciable du cas précédent. A nouveau, G et X sont finis.

— *G fixe un bout ω:* Le raisonnement fait au §4 montre que $G \cap \mathrm{Ker}\, l_\omega$ est la limite inductive du système dirigé de groupes finis $(G \cap (\mathrm{Aut}\, X)_x)_{x \in X}$, dont les ordres sont uniformément bornés sur X, vu les hypothèses. Donc

---

MOY B, MOY C, MOY D que nous avons énoncés dans notre §3. Au §6 de son introduction, von Neumann a ce commentaire: «*Jetzt dürfen wir wohl sagen: es kommt nur auf die Eigenschaften der (abstrakten) Gruppe G an. Denn der gewünschte allgemeine Maßbegriff ist (unter den betrachteten Verhältnissen) sicher vorhanden, wenn sie mit Hilfe der Erzeugungs-Prinzipien A.-D. in §4 gewonnen werden kann, und er existiert bestimmt nicht, wenn G eine freie Untergruppe mit zwei Erzeugenden σ, τ enthält [...].*» Ceci suggère que von Neumann avait le problème en tête, sans qu'il prenne la peine de l'expliciter; mais il nous paraît abusif de lui attribuer une conjecture allant dans un sens ou l'autre. D'après [Pi], pp. 248-249, Day est le premier à avoir posé le problème pour la classe des groupes discrets; et en effet, l'énoncé apparaît explicitement à la dernière ligne du §4 de [Da]; mais Day n'en fait pas non plus une conjecture.

$G \cap \operatorname{Ker} l_\omega$ est un groupe fini. On ne peut avoir $G = G \cap \operatorname{Ker} l_\omega$, qui impliquerait que G soit fini, et contredirait la finitude du nombre d'orbites de G sur les sommets. Donc $l_\omega(G)$ est un groupe cyclique infini, et G contient un sous-groupe cyclique infini d'indice fini. On voit facilement que, dans ce cas, l'arbre X possède une unique droite $]\alpha, \omega[$ le long de laquelle sont attachés des arbres finis qui se répètent périodiquement (avec une période n si $l_\omega(G) = n\mathbf{Z}$).



— *G fixe une paire de bouts $\{\alpha, \omega\}$:* Comme G n'a qu'un nombre fini d'orbites sur les sommets de la droite $]\alpha, \omega[$, on voit que $r_{\alpha\omega}(G)$ est un sous-groupe infini du groupe D_∞. Donc $r_{\alpha\omega}(G)$ contient un sous-groupe infini cyclique d'indice fini. D'autre part, $G \cap \operatorname{Ker} r_{\alpha\omega}$ coïncide avec $\cap_{x \in]\alpha,\omega[}(G \cap (\operatorname{Aut} X)_x)$, qui est un groupe fini par hypothèse. Donc G lui-même contient un sous-groupe infini cyclique d'indice fini. L'allure de l'arbre X est la même qu'au cas précédent.

Remarques. 1) On peut démontrer différemment le corollaire 4 quand l'arbre est localement fini. En effet, du fait des hypothèses, G est alors un groupe finiment engendré, et si d_S désigne la métrique sur G associée à une partie génératrice finie S de G, l'espace métrique (G, d_S) est quasi-isométrique à l'espace métrique (X, d) (pour ces assertions, voir [GH], Proposition 19 du Chapitre 4). L'espace (X, d) est un espace hyperbolique au sens de Gromov, et l'hyperbolicité est invariante par quasi-isométrie ([GH]), Théorème 12 du Chapitre 5); donc G est un groupe hyperbolique au sens de Gromov, et la trichotomie annoncée est valable pour ces groupes ([Gr], §3.1; [GH], Théorème 37 du Chapitre 8).

2) En utilisant la théorie de Bass-Serre des groupes fondamentaux de graphes de groupes, Scott et Wall puis Bass et Kulkarni ont obtenu un résultat plus précis que le corollaire 4: sous les mêmes hypothèses, le groupe G contient

un sous-groupe libre d'indice fini sur zéro, un ou plusieurs générateurs (voir [SW], Theorem 7.3 et [BK], Corollary 2.8)[7]).

6. Le cas des arbres réels

Un *arbre réel* est un espace métrique entre deux points duquel passe un arc unique, qui est de plus isométrique à un intervalle de **R**. Ces objets ont été introduits par Tits [T3], sous le nom d'«arbres». Nous renvoyons à l'article original de Tits pour le rôle des arbres réels en algèbre, et aux travaux de Morgan-Shalen [MS], Culler-Morgan [CM] et Paulin [Pl] pour leur rôle en topologie. Notons qu'un arbre ordinaire peut être vu comme un arbre réel, en remplaçant chaque arête par une copie isométrique de l'intervalle [0, 1], et en prolongeant la métrique d de manière évidente.

Une *demi-droite* (resp. *droite*) d'un arbre réel X est une image isométrique de la demi-droite $[0, \infty[$ (resp. la droite **R**).

On note Isom X le groupe des isométries de l'arbre réel X. La classification des isométries est encore plus simple que pour un arbre ordinaire (voir [T3], 3.1; [MS], Theorem II.2.3). Les isométries sont de deux types:

— Les isométries qui fixent au moins un point. Il s'agit des isométries *elliptiques,* ou *rotations.*

— Les isométries qui ne fixent aucun point. Il s'agit des isométries *hyperboliques,* ou *translations.* Comme dans le cas des arbres ordinaires, une telle isométrie g possède une unique droite invariante, appelée *axe* de g, et le long de laquelle g agit par translation.

Un *bout* de l'arbre réel X est un élément de la limite projective

$$\lim_{\leftarrow} \pi_0(X - B)$$

où B parcourt les parties bornées fermées de X, et $\pi_0(X - B)$ désigne l'espace des composantes connexes de $X - B$ (voir [CM], §2; [C1], §1). Lorsque l'arbre réel X est complet, cette définition équivaut à celle de Tits ([T3], 1.1) analogue à celle que nous avons donnée au §1 en termes de classes d'équivalence de demi-droites[8]). Si on le désire, on peut avec Tits ne considérer que des arbres réels complets: en effet la complétion d'un arbre réel est encore un arbre réel ([MS], Corollary II.1.10).

---

[7]) Notons X_∞ l'arbre homogène de degré infini, où tout sommet a une infinité dénombrable de voisins. Soit G un groupe discret opérant transitivement avec stabilisateurs finis sur X_∞. Dans [V1], le second auteur construit des représentations uniformément bornées non unitarisables de G. L'existence de telles représentations implique la non-moyennabilité de G. Le corollaire 4 ou le résultat de Bass-Kulkarni donnent la raison de cette non-moyennabilité.