3. Preuves des implications (ii) => (iii) et (iii) => (iv) du Théorème Moyennabilité

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Remarque. Si l'arbre X est localement fini, on peut donner une preuve différente du fait que H agit librement sur X. Grâce au lemme 7, on sait déjà que H est libre et qu'il existe au moins un sommet dont le stabilisateur dans H soit trivial (prendre par exemple un sommet sur l'axe de a). Par le lemme 3, H est un sous-groupe discret de Aut X. Si x est un sommet quelconque, le sous-groupe $H \cap (\mathrm{Aut}\, X)_x$ est discret dans le groupe compact $(\mathrm{Aut}\, X)_x$, donc $H \cap (\mathrm{Aut}\, X)_x$ est fini. Comme H est libre, $H \cap (\mathrm{Aut}\, X)_x$ est trivial.

3. Preuves des implications (ii) ⇒ (iii) et (iii) ⇒ (iv) du Théorème Moyennabilité

L'implication (ii) ⇒ (iii) résulte immédiatement du lemme 3. Nous donnons maintenant quelques rappels sur la moyennabilité qui rendront évidente l'implication (iii) ⇒ (iv).

Soit G un groupe localement compact. On dit que G est *moyennable* si, chaque fois que G opère de manière affine et continue sur un convexe compact non vide C dans un espace vectoriel topologique localement convexe, il existe dans C un point fixe pour l'action de G. Comme références sur la moyennabilité, nous recommandons la petite monographie de Greenleaf [Gl], le livre de Paterson [Pa], et l'article remarquable d'efficacité d'Eymard [Ey]; à propos de la moyennabilité des groupes discrets, l'article original de von Neumann [vN] vaut la peine d'être lu; pour l'évolution historique de la notion, on consultera avec profit le livre de Pier ([Pi], Chapitre 9). Nous rasssemblons maintenant sans démonstration quelques faits classiques sur la moyennabilité.

MOY A: Un groupe abélien est moyennable (c'est le théorème de Markoff-Kakutani, voir [Bo], Appendice du Chapitre IV).

MOY B: La moyennabilité est préservée par extensions; en d'autres termes, si $1 \to N \to G \to G/N \to 1$ est une suite exacte courte de groupes localement compacts avec N et G/N moyennables, alors G est moyennable (voir [Ey], II.1; [Gl], Theorem 2.3.3).

MOY C: La moyennabilité est préservée par limites inductives (voir [Gl], Theorem 2.3.4).

MOY D: Un groupe compact est moyennable.

MOY E: Un sous-groupe fermé d'un groupe moyennable est moyennable (voir [Ey], IV; [Gl], Theorem 2.3.2).

MOY F: Un groupe libre non abélien (avec la topologie discrète) n'est pas moyennable (voir [Ey], II.4; [Gl], exemple 1.2.3; [vN], §5 de l'Introduction).

L'implication (iii) $\Rightarrow$ (iv) du théorème est alors une conséquence immédiate de MOY E et MOY F.

4. Preuve de l'implication (iv) $\Rightarrow$ (i) du Théorème

Nous allons montrer que, si X est un arbre localement fini, les stabilisateurs dans $\mathrm{Aut}\,X$ d'un sommet, d'une arête, d'un bout, ou d'une paire de bouts de X, sont des sous-groupes fermés moyennables.

— *Stabilisateur d'un sommet:* Si x est un sommet, $(\mathrm{Aut}\,X)_x$ est un sous-groupe compact, donc moyennable par MOY D.

— *Stabilisateur d'une arête:* Si $[x, y]$ est une arête, nous notons $(\mathrm{Aut}\,X)_{[x,y]}$ son stabilisateur dans $\mathrm{Aut}\,X$. Le sous-groupe compact ouvert $(\mathrm{Aut}\,X)_x \cap (\mathrm{Aut}\,X)_y$ est d'indice 2 ou 1 dans $(\mathrm{Aut}\,X)_{[x,y]}$ (selon qu'il existe une inversion conservant $[x, y]$ ou pas). Par conséquent $(\mathrm{Aut}\,X)_{[x,y]}$ est lui-même compact, donc moyennable.

— *Stabilisateur d'un bout:* Soit ω un bout de X; considérons l'homomorphisme $l_\omega : (\mathrm{Aut}\,X)_\omega \to \mathbf{Z}$ fourni par le lemme 4 (iii); comme $\mathbf{Z}$ est moyennable ainsi que ses sous-groupes (par MOY A), il suffit par MOY B de vérifier que le noyau $\mathrm{Ker}\,l_\omega$ est moyennable. Pour cela, observons que la famille de sous-groupes compacts $((\mathrm{Aut}\,X)_\omega \cap (\mathrm{Aut}\,X)_x)_{x \in X}$ forme un système dirigé: si x, y sont des sommets quelconques de X, et z un sommet sur $[x, \omega[\cap [y, \omega[$, on a:

$$((\mathrm{Aut}\,X)_\omega \cap (\mathrm{Aut}\,X)_x) \cup ((\mathrm{Aut}\,X)_\omega \cap (\mathrm{Aut}\,X)_y) \subseteq (\mathrm{Aut}\,X)_\omega \cap (\mathrm{Aut}\,X)_z$$

puisque $(\mathrm{Aut}\,X)_\omega \cap (\mathrm{Aut}\,X)_x$ fixe ponctuellement la demi-droite $[x, \omega[$. La limite inductive de ce système est l'ensemble des rotations dans $(\mathrm{Aut}\,X)_\omega$, qui coïncide avec $\mathrm{Ker}\,l_\omega$ par le lemme 4 (ii). Le groupe $\mathrm{Ker}\,l_\omega$ est limite inductive de groupes compacts, il est donc moyennable par MOY C.

— *Stabilisateur d'une paire de bouts:* Soit $\{\alpha, \omega\}$ une paire de bouts de X; considérons l'homomorphisme $r_{\alpha\omega} : (\mathrm{Aut}\,X)_{\{\alpha,\omega\}} \to D_\infty$ introduit vers la fin du §1. Comme D_∞ est un groupe résoluble, tous ses sous-groupes sont moyennables, et il suffit par MOY B de vérifier que le noyau $\mathrm{Ker}\,r_{\alpha\omega}$ est moyennable; mais ce noyau est $\cap_{x \in]\alpha,\omega[}((\mathrm{Aut}\,X)_{\{\alpha,\omega\}} \cap (\mathrm{Aut}\,X)_x)$, qui est compact.