

### **3. Preuves des implications (ii) => (iii) et (iii) => (iv) du Théorème Moyennabilité**

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

#### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

*Remarque.* Si l'arbre  $X$  est localement fini, on peut donner une preuve différente du fait que  $H$  agit librement sur  $X$ . Grâce au lemme 7, on sait déjà que  $H$  est libre et qu'il existe au moins un sommet dont le stabilisateur dans  $H$  soit trivial (prendre par exemple un sommet sur l'axe de  $a$ ). Par le lemme 3,  $H$  est un sous-groupe discret de  $\text{Aut } X$ . Si  $x$  est un sommet quelconque, le sous-groupe  $H \cap (\text{Aut } X)_x$  est discret dans le groupe compact  $(\text{Aut } X)_x$ , donc  $H \cap (\text{Aut } X)_x$  est fini. Comme  $H$  est libre,  $H \cap (\text{Aut } X)_x$  est trivial.

### 3. PREUVES DES IMPLICATIONS (ii) $\Rightarrow$ (iii) ET (iii) $\Rightarrow$ (iv) DU THÉORÈME MOYENNABILITÉ

L'implication (ii)  $\Rightarrow$  (iii) résulte immédiatement du lemme 3. Nous donnons maintenant quelques rappels sur la moyennabilité qui rendront évidente l'implication (iii)  $\Rightarrow$  (iv).

Soit  $G$  un groupe localement compact. On dit que  $G$  est *moyennable* si, chaque fois que  $G$  opère de manière affine et continue sur un convexe compact non vide  $C$  dans un espace vectoriel topologique localement convexe, il existe dans  $C$  un point fixe pour l'action de  $G$ . Comme références sur la moyennabilité, nous recommandons la petite monographie de Greenleaf [Gl], le livre de Paterson [Pa], et l'article remarquable d'efficacité d'Eymard [Ey]; à propos de la moyennabilité des groupes discrets, l'article original de von Neumann [vN] vaut la peine d'être lu; pour l'évolution historique de la notion, on consultera avec profit le livre de Pier ([Pi], Chapitre 9). Nous rassemblons maintenant sans démonstration quelques faits classiques sur la moyennabilité.

MOY A: Un groupe abélien est moyennable (c'est le théorème de Markoff-Kakutani, voir [Bo], Appendice du Chapitre IV).

MOY B: La moyennabilité est préservée par extensions; en d'autres termes, si  $1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow G/N \rightarrow 1$  est une suite exacte courte de groupes localement compacts avec  $N$  et  $G/N$  moyennables, alors  $G$  est moyennable (voir [Ey], II.1; [Gl], Theorem 2.3.3).

MOY C: La moyennabilité est préservée par limites inductives (voir [Gl], Theorem 2.3.4).

MOY D: Un groupe compact est moyennable.

MOY E: Un sous-groupe fermé d'un groupe moyennable est moyennable (voir [Ey], IV; [Gl], Theorem 2.3.2).

MOY F: Un groupe libre non abélien (avec la topologie discrète) n'est pas moyennable (voir [Ey], II.4; [Gl], exemple 1.2.3; [vN], §5 de l'Introduction).

L'implication (iii)  $\Rightarrow$  (iv) du théorème est alors une conséquence immédiate de MOY E et MOY F.

#### 4. PREUVE DE L'IMPLICATION (iv) $\Rightarrow$ (i) DU THÉORÈME

Nous allons montrer que, si  $X$  est un arbre localement fini, les stabilisateurs dans  $\text{Aut } X$  d'un sommet, d'une arête, d'un bout, ou d'une paire de bouts de  $X$ , sont des sous-groupes fermés moyennables.

— *Stabilisateur d'un sommet*: Si  $x$  est un sommet,  $(\text{Aut } X)_x$  est un sous-groupe compact, donc moyennable par MOY D.

— *Stabilisateur d'une arête*: Si  $[x, y]$  est une arête, nous notons  $(\text{Aut } X)_{[x, y]}$  son stabilisateur dans  $\text{Aut } X$ . Le sous-groupe compact ouvert  $(\text{Aut } X)_x \cap (\text{Aut } X)_y$  est d'indice 2 ou 1 dans  $(\text{Aut } X)_{[x, y]}$  (selon qu'il existe une inversion conservant  $[x, y]$  ou pas). Par conséquent  $(\text{Aut } X)_{[x, y]}$  est lui-même compact, donc moyennable.

— *Stabilisateur d'un bout*: Soit  $\omega$  un bout de  $X$ ; considérons l'homomorphisme  $l_\omega: (\text{Aut } X)_\omega \rightarrow \mathbf{Z}$  fourni par le lemme 4 (iii); comme  $\mathbf{Z}$  est moyennable ainsi que ses sous-groupes (par MOY A), il suffit par MOY B de vérifier que le noyau  $\text{Ker } l_\omega$  est moyennable. Pour cela, observons que la famille de sous-groupes compacts  $((\text{Aut } X)_\omega \cap (\text{Aut } X)_x)_{x \in X}$  forme un système dirigé: si  $x, y$  sont des sommets quelconques de  $X$ , et  $z$  un sommet sur  $[x, \omega[ \cap [y, \omega[$ , on a:

$$((\text{Aut } X)_\omega \cap (\text{Aut } X)_x) \cup ((\text{Aut } X)_\omega \cap (\text{Aut } X)_y) \subseteq (\text{Aut } X)_\omega \cap (\text{Aut } X)_z$$

puisque  $(\text{Aut } X)_\omega \cap (\text{Aut } X)_x$  fixe ponctuellement la demi-droite  $[x, \omega[$ . La limite inductive de ce système est l'ensemble des rotations dans  $(\text{Aut } X)_\omega$ , qui coïncide avec  $\text{Ker } l_\omega$  par le lemme 4 (ii). Le groupe  $\text{Ker } l_\omega$  est limite inductive de groupes compacts, il est donc moyennable par MOY C.

— *Stabilisateur d'une paire de bouts*: Soit  $\{\alpha, \omega\}$  une paire de bouts de  $X$ ; considérons l'homomorphisme  $r_{\alpha\omega}: (\text{Aut } X)_{\{\alpha, \omega\}} \rightarrow D_\infty$  introduit vers la fin du §1. Comme  $D_\infty$  est un groupe résoluble, tous ses sous-groupes sont moyennables, et il suffit par MOY B de vérifier que le noyau  $\text{Ker } r_{\alpha\omega}$  est moyennable; mais ce noyau est  $\bigcap_{x \in ]\alpha, \omega[} ((\text{Aut } X)_{\{\alpha, \omega\}} \cap (\text{Aut } X)_x)$ , qui est compact.