Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1991)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LONGUEUR STABLE DES COMMUTATEURS
Autor: Bavard, Christophe
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-58734

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 37 (1991), p. 109-150

LONGUEUR STABLE DES COMMUTATEURS

par Christophe BAVARD

INTRODUCTION

A tout groupe Γ on associe classiquement son groupe dérivé Γ': c'est le sous-groupe de Γ engendré par *l'ensemble* des commutateurs $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1} (x, y \in \Gamma)$. Un élément donné γ de Γ' est de plusieurs façons possibles le produit de commutateurs. On appellera *longueur des commutateurs* de γ le nombre minimal de commutateurs nécessaires pour exprimer γ; cet entier sera noté $c_\Gamma(\gamma)$ ou simplement $c(\gamma)$.

En 1975, C. Edmunds a montré que la longueur des commutateurs est effectivement calculable dans les groupes libres [Ed] (voir aussi [Gr 1] p. 212). Un peu plus tard, R. Goldstein et E. Turner [G-T], ainsi que M. Culler [Cu] retrouvaient ce résultat en s'appuyant sur la topologie des surfaces; on propose dans la partie 2 une version élémentaire de leurs algorithmes. En particulier la propriété suivante ([Cu]) répond à une question de M. Newman ([Ne]): dans le groupe libre à deux générateurs u et v

$$c([u, v]^n) = E(n/2) + 1 \qquad (n \in \mathbf{N}^*) \tag{1}$$

où E est la partie entière. Par exemple $[u, v]^3$ est le produit de deux commutateurs seulement, comme le prouve l'identité remarquable ([Cu])

$$[u, v]^3 = [uvu^{-1}, v^{-1}uvu^{-2}]\,[v^{-1}uv, v^2] \ .$$

Il est intéressant d'étudier le comportement global de la longueur des commutateurs; on peut en particulier se demander si, pour un groupe donné Γ, cette fonction est bornée sur Γ'. Posons

$$c(\Gamma) = \sup\{c(\gamma); \gamma \in \Gamma'\} \ .$$

Pour le groupe libre à deux générateurs, on a $c = \infty$ (cela résulte, par exemple, de (1)). Cette quantité a été très étudiée pour les groupes linéaires des anneaux commutatifs, ainsi $c(SL_2(\mathbf{Z})) = \infty$ tandis que $c(SL_n(\mathbf{Z})) < \infty$ si $n \geqslant 3$ ([Ne]); voir [D-V] pour de nombreuses références. Par ailleurs S. Matsumoto et S. Morita ont montré que $c(\Gamma)$ peut contenir une information sur la

cohomologie bornée à valeurs réelles de Γ notée $H_b^*(\Gamma, \mathbf{R})$: si Γ est uniformément parfait (i.e. $\Gamma' = \Gamma$ et $c(\Gamma) < \infty$) alors l'application naturelle $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \to H^2(\Gamma, \mathbf{R})$ est injective ([M-M]). Rappelons que $H_b^*(\Gamma, \mathbf{R})$ est l'homologie du complexe

$$0 \to \mathbf{R} \overset{d=0}{\to} C_b^1(\Gamma) \overset{d}{\to} C_b^2(\Gamma) \to \dots$$

où $C_b^n(\Gamma)$ désigne l'espace des fonctions *bornées* de Γ^n dans $\mathbf{R}$, avec pour $f \in C_b^n(\Gamma)$ $(n \geqslant 1)$ la formule habituelle:

$$df(x_1, \dots, x_{n+1}) = f(x_2, \dots, x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(x_1, \dots, x_i x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(x_1, \dots, x_n) .$$

Afin de préciser cette relation entre commutateurs et cohomologie bornée on définit la *longueur stable* d'un élément γ dans Γ':

$$\| \gamma \| = \lim_{n \to \infty} \frac{c(\gamma^n)}{n} .$$

Il faut noter que d'après l'inégalité

$$c(\gamma_1 \gamma_2) \leqslant c(\gamma_1) + c(\gamma_2) \qquad (\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma')$$

la suite $c(\gamma^n)$ est sous-additive, donc la limite ci-dessus existe (voir [P-S, partie I, exercice 99]). Cela étant, on établira le

THÉORÈME. *L'application* $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \to H^2(\Gamma, \mathbf{R})$ *est injective si et seulement si la longueur stable est nulle sur* Γ'.

La connaissance de $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$ nous renseigne donc sur la longueur stable: celle-ci est toujours nulle pour un groupe moyennable (par exemple résoluble) puisque sa cohomologie bornée est triviale ([Gr 2] ou [Iv]).

Le noyau de $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \to H^2(\Gamma, \mathbf{R})$ est de codimension finie pour une large classe de groupes intéressants, tels que les groupes fondamentaux de polyèdres compacts. Quand la longueur stable est nulle, on voit donc que l'espace $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$ est «petit».

C'est la notion de *quasi-morphisme* qui relie commutateurs et cohomologie bornée. Une application $f: \Gamma \to \mathbf{R}$ est un *quasi-morphisme* si $f(xy) - f(x) - f(y)$ est borné $(x, y \in \Gamma)$. D'une part, la donnée d'une telle application permet de minorer la longueur des commutateurs, selon une méthode qui remonte à Milnor [Mil] (voir 1.1); d'autre part les quasi-morphismes décrivent le noyau de $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \to H^2(\Gamma, \mathbf{R})$ puisque

$f(xy) - f(x) - f(y)$ est le cobord de f. En fait ce noyau est isomorphe par le cobord à l'espace K des quasi-morphismes *homogènes* $\varphi : \Gamma \to \mathbf{R}$ (i.e. $\varphi(x^n) = n\varphi(x), x \in \Gamma, n \in \mathbf{Z}$) définis à l'addition d'un morphisme près (voir [Be] ou 3.3). La longueur stable apparaît alors comme une version duale d'une norme naturelle sur K:

$$\| \varphi \| = \sup\{ | \varphi([x, y]) | ; \ x, y \in \Gamma \} .$$

Plus précisément:

THÉORÈME DE DUALITÉ. *Pour tout élément* γ *de* Γ' *on a la relation*

$$\| \gamma \| = \frac{1}{2} \sup_{\varphi \in K} \frac{| \varphi(\gamma) |}{\| \varphi \|} .$$

Ce résultat met en évidence la longueur stable comme une quantité naturelle du point de vue de la cohomologie bornée, puisqu'elle est déterminée par les quasi-morphismes. La longueur des commutateurs, quant à elle, est seulement *minorée* par les quasi-morphismes (voir 1.1).

Cet article comprend trois parties. La première contient une preuve élémentaire de la formule (1) ainsi qu'une petite généralisation. Dans la partie 2, on détermine la longueur des commutateurs dans les groupes libres; on y considère également les produits de carrés car ils s'interprètent topologiquement comme les produits de commutateurs (par des surfaces). Enfin, la troisième partie est consacrée à l'étude de la longueur stable; on décrit le phénomène de dualité avec la cohomologie bornée et les propriétés qui en découlent.

Je remercie Etienne Ghys pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail. Il m'a expliqué que le genre des classes d'homologie de dimension 2 ([B-G]) s'interprète comme nombre minimal de commutateurs. J'ai apprécié sa disponibilité et ses judicieux conseils.

1. LONGUEUR DE $[u, v]^n$.

L'objectif de cette partie est d'établir le théorème suivant, qui généralise la relation (1) de l'introduction:

THÉORÈME 1. *Dans le groupe libre à* $2k$ *générateurs* $(k \in \mathbf{N}^*)$

$$u_i, v_i \quad (i = 1, \ldots, k)$$

on a l'égalité:

$$c(\{[u_1, v_1] \dots [u_k, v_k]\}^n) = n(k-1) + E(n/2) + 1 \quad (n \in \mathbf{N}^*) .$$

Nous commencerons par traiter le cas où $k = 1$ en minorant la longueur de $[u, v]^n$ (1.1), puis en la majorant (1.2); l'énoncé général du théorème 1 s'en déduira alors facilement (1.3). Signalons que la relation (1) sera retrouvée indépendamment au §2.7. Enfin, il nous a semblé intéressant de donner une décomposition explicite de $[u, v]^n$ en produit de $E(n/2) + 1$ commutateurs (1.4).

1.1. Quasi-morphismes et commutateurs

Nous allons voir que la donnée d'un quasi-morphisme permet de minorer la longueur des commutateurs; un bon choix dans le cas du groupe libre $L(u, v)$ donnera alors la minoration cherchée pour $c([u, v]^n)$.

On appellera *défaut* d'un quasi-morphisme f la borne supérieure de $|f(xy) - f(x) - f(y)|$ pour x et y dans Γ.

Lemme 1.1. *Soit* $f : \Gamma \to \mathbf{R}$ *un quasi-morphisme antisymétrique (i.e.* $f(x^{-1}) = -f(x), x \in \Gamma$*) de défaut* D*. Alors pour tout élément* γ *de* Γ':

$$c(\gamma) \geqslant \frac{1}{4}\left(\frac{|f(\gamma)|}{D} + 1\right) .$$

En effet si γ est le produit de k commutateurs, $f(\gamma)$ est égal, à $(4k-1)D$ près, à une somme de $4k$ termes qui s'annulent deux à deux par antisymétrie. D'où l'inégalité $|f(\gamma)| \leqslant (4k-1)D$.

Cette observation apparaît déjà dans [Mil 1].

Remarques.

1) On peut toujours antisymétriser un quasi-morphisme suivant la formule $1/2(f(x) - f(x^{-1}))$. Cette opération n'augmente pas le défaut.
2) L'existence d'un quasi-morphisme non borné sur Γ' implique que $c(\Gamma)$ est infini.

Le lemme indique clairement la méthode pour bien minorer $c(\gamma)$: il s'agit de trouver un quasi-morphisme de petit défaut et qui prend une grande valeur sur γ.

Voici maintenant des exemples intéressants, dus à R. Brooks ([Brk]), de quasi-morphismes du groupe libre $L = L(u, v)$ (signalons que B. Johnson

avait construit auparavant un quasi-morphisme du groupe libre L: voir [Jo] p. 38).

Etant donné un mot réduit M en u et v, on note $\mathcal{O}_M(x)$ le nombre d'occurences de M dans l'écriture *réduite* d'un élément x de L et on pose

$$f_M(x) = \mathcal{O}_M(x) - \mathcal{O}_{M^{-1}}(x) .$$

Vérifions que f_M est un quasi-morphisme. Soit X et Y deux mots réduits. Supposons d'abord que XY est aussi réduit; on a alors:

$$f_M(XY) = f_M(X) + f_M(Y) + \delta_M(X, Y)$$

où $\delta_M(X, Y)$ provient des occurences de M et M^{-1} situées «à cheval» sur X et Y, donc $|\delta_M(X, Y)|$ est au plus égal à long $M - 1$.

De façon plus générale X et Y s'écrivent respectivement $X'A$ et $A^{-1}Y'$ (avec $X'Y'$ réduit) et on a:

$$\begin{aligned} &f_M(X'Y') - f_M(X) - f_M(Y) \\ &= \delta_M(X', Y') - \delta_M(X', A) - \delta_M(A^{-1}, Y') . \end{aligned} \tag{2}$$

Le défaut de f_M est donc majoré par $3(\text{long } M - 1)$.

Cette estimation est souvent améliorable sur des exemples; ainsi pour $M = uv$, on constate qu'un seul des trois termes de droite dans (2) peut être non nul, donc le défaut de f_{uv} est égal à 1. Posons alors

$$f = f_{uv} + f_{vu^{-1}} + f_{u^{-1}v^{-1}} + f_{v^{-1}u} .$$

Le défaut de f est visiblement (par additivité) majoré par 4. Mais un examen plus attentif de la relation (2) permet d'obtenir mieux:

Affirmation. Le défaut de f est égal à 2.

Preuve. Reprenons les notations ci-dessus: $X = X'A$, $Y = A^{-1}Y'$. On exclut le cas évident où l'un des mots A, X' ou Y' est vide. Comme f est invariant par la permutation cyclique $u \to v \to u^{-1} \to v^{-1} \to u$ sur les lettres des mots, on peut supposer que X' se termine par la lettre u. Il reste alors six cas possibles:

X'	A	A^{-1}	Y'	*valeur de* (2)
$\dots u$	$u \dots$	$\dots u^{-1}$	$v \dots$	2
$\dots u$	$v^{-1}\dots$	$\dots v$	$v \dots$	2
$\dots u$	$u \dots$	$\dots u^{-1}$	$v^{-1}\dots$	-2
$\dots u$	$v \dots$	$\dots v^{-1}$	$v^{-1}\dots$	-2
$\dots u$	$v \dots$	$\dots v^{-1}$	$u \dots$	-2
$\dots u$	$v^{-1}\dots$	$\dots v$	$u \dots$	2

Il est maintenant facile d'établir l'inégalité $c([u,v]^n) \geqslant E(n/2)+1$: on applique le lemme à f sachant que $f([u,v]^n) = 4n-1$ et que $D=2$.

1.2. $[u,v]^n$ EST LE PRODUIT DE $E(n/2)+1$ COMMUTATEURS

Le nombre de commutateurs a une interprétation topologique simple que nous allons exploiter.

Notons Σ_g la surface orientable de genre g dont le bord est un cercle, et $\pi_1(\Sigma_g, *)$ son groupe fondamental. On omettra le point-base $*$ qui sera toujours pris sur le bord. Bien que $\pi_1(\Sigma_g)$ soit un groupe libre, il sera commode de le présenter de la façon suivante:

$$\pi_1(\Sigma_g) = < a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, c \mid c = \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] > .$$

L'élément c est représenté par le bord $\partial\Sigma_g$ de Σ_g.

Soit maintenant Γ un groupe et X un espace topologique dont le groupe fondamental est précisément Γ. Etant donné un élément γ de Γ', on a deux propriétés équivalentes:

(i) γ est le produit de g commutateurs;

(ii) il existe une application continue $f: \Sigma_g \to X$ telle que $f(\partial\Sigma_g)$ représente γ.

Pour voir que (ii) entraîne (i), il suffit d'écrire la relation homotopique

$$\gamma = f_*(c) = \prod_{i=1}^{g} [f_*(a_i), f_*(b_i)] .$$

La réciproque, que nous n'utiliserons pas ici, s'établit facilement en construisant f à partir de la description usuelle de Σ_g comme quotient d'un polygone à $4g+1$ côtés.

Puisqu'on étudie le cas du groupe libre $L(u,v)$, on prend $X = \Sigma_1$, et on choisit les générateurs u et v de sorte que $[u,v]$ soit représenté par le bord $\partial\Sigma_1$. Par ailleurs, on observe que pour écrire $[u,v]^n$ comme produit de $E(n/2)+1$ commutateurs, il suffit de le faire quand n est *impair*. La propriété cherchée sera alors une conséquence du fait suivant:

PROPOSITION ([Ma 2], [H-S]). *Si n est impair, il existe un revêtement de degré n de Σ_1 par Σ_g avec $g = (n+1)/2$.*

Admettons un instant ce résultat: le revêtement doit envoyer $\partial\Sigma_g$ sur l'élément $[u,v]^n$, qui se trouve du coup écrit comme produit de $(n+1)/2$ commutateurs! Cela achève la preuve de l'inégalité $c_L([u,v]^n) \leqslant E(n/2)+1$.

Remarque. Cette méthode est utilisée dans [Min] pour montrer que $[u, v]^{2k+1} (k \in \mathbf{N}^*)$ est le produit de $k + 1$ commutateurs.

Preuve de la proposition. Je remercie Alexis Marin qui m'a signalé la démonstration ci-dessous.

Rappelons qu'à toute action à gauche de $\pi_1(\Sigma_1)$ sur un ensemble à n éléments $\{1, \ldots, n\}$ on peut associer, par «suspension», un revêtement de degré n de Σ_1. L'action par relèvements des chemins dans la fibre du revêtement est alors opposée à l'action donnée: le revêtement est connexe si et seulement si cette action est transitive.

Il se trouve que pour n impair, la permutation cyclique $(1, 2, \ldots, n)$ est un commutateur dans le groupe $\mathscr{S}_n$ des bijections de $\{1, 2, \ldots, n\}$:

$$(1, 2, \ldots, n) = (1, k+2, \ldots, n)(1, 2, \ldots, k+1) \qquad (n = 2k+1)$$

produit de deux $(k + 1)$-cycles, le second étant conjugué à l'inverse du premier. D'où un morphisme de $\pi_1(\Sigma_1)$ dans $\mathscr{S}_n$ qui envoie $[u, v]$ sur $(1, 2, \ldots, n)$. Le revêtement associé est une surface orientable connexe, et comme l'action de $[u, v]$ est déjà transitive, son bord est connexe. Il s'agit donc d'une surface Σ_g, où g est déterminé par la relation $1 - 2g = -n$.

1.3. Longueur de $\{[u_1, v_1] \ldots [u_k, v_k]\}^n$

Dans ce paragraphe, on prouve le théorème 1 en s'appuyant sur le fait que $c([u, v]^n) = E(n/2) + 1$.

Lemme 1.3. *Soit* Γ *un groupe et* γ, δ *deux éléments de* Γ'. *On a alors l'inégalité*

$$c(\{\gamma\delta\}^n) \leqslant nc(\delta) + c(\gamma^n) \qquad (n \in \mathbf{N}^*) .$$

La preuve est immédiate à partir de l'identité

$$(\gamma\delta)^n = (\gamma\delta\gamma^{-1})(\gamma^2\delta\gamma^{-2}) \ldots (\gamma^n\delta\gamma^{-n})\gamma^n .$$

En appliquant ceci à

$$\Gamma = L(u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k), \gamma = [u_1, v_1] \quad \text{et} \quad \delta = [u_2, v_2] \ldots [u_k, v_k] ,$$

on obtient

$$c(\{[u_1, v_1] \ldots [u_k, v_k]\}^n) \leqslant n(k-1) + E(n/2) + 1 .$$

Pour établir l'inégalité inverse, écrivons $[u, v]^{2k-1}$ comme produit de k commutateurs du groupe libre $L(u, v)$:

$$[u,v]^{2k-1} = [a_1,b_1]\dots[a_k,b_k]\ (a_i,b_i \in L(u,v)).$$

On peut alors définir un morphisme $\Phi: L(u_1,v_1\dots u_k,v_k) \to L(u,v)$ en envoyant u_i sur a_i et v_i sur $b_i (i=1,\dots,k)$. Si l'on note α l'élément

$$\{[u_1,v_1]\dots[u_k,v_k]\}^n\ ,$$

on a donc

$$c(\alpha) \geqslant c(\Phi(\alpha)) = c([u,v]^{n(2k-1)}) = n(k-1) + E(n/2) + 1\ .$$

Ceci termine la démonstration du théorème 1.

1.4. Voici une preuve complètement élémentaire et explicite de l'inégalité $c([u,v]^n) \leqslant E(n/2)+1$.

Afin d'alléger l'écriture, posons

$$(p,q) = {}^{u^q}([u,v]^p) = u^q[u,v]^p u^{-q} \qquad (p,q\in\mathbf{Z})\ .$$

Ainsi

$$[u^n,v] = (1,n-1)(1,n-2)\dots(1,1)(1,0) \qquad (n\in\mathbf{N}^*)\ .$$

Considérons alors le produit de 2 commutateurs

$$\Delta = \left[{}^{u^{n-2}}[u,v]\ {}^{u^{n-3}}([u,v]^2)\ \dots\ {}^{u}([u,v]^{n-2})\,[u,v]^{n-1}, u\right][u^n,v]$$

c'est-à-dire

$$\text{(R)}\qquad \begin{aligned}\Delta &= (1,n-2)(2,n-3)\dots(n-1,0)(-n+1,1)\dots\\ &\dots(-3,n-3)(-1,n-2)(1,n-3)(1,n-4)\dots(1,1)(1,0)\ .\end{aligned}$$

Bien que le cas n impair suffise, commençons par examiner le cas n pair $(n=2k)$ qui est plus simple. En notant

$$A = (1,2k-2)(2,2k-3)$$

et

$$B = (3,2k-4)(4,2k-5)\dots(-4,2k-4)(-3,2k-3)(-1,2k-1)$$

on a

$$[B,A]\Delta = (3,2k-4)(4,2k-5)\dots(-3,2k-4)(1,2k-5)\dots(1,1)(1,0)\ .$$

On remarque que la valeur maximale de q dans les (p,q) a diminué de $2k-2$ pour Δ à $2k-4$ pour $[B,A]\Delta$; en répétant cette opération $k-1$ fois on obtient $(2k,0) = [u,v]^{2k}$ comme produit de $k+1$ commutateurs.

Exemple $(n=4)$: $[u,v]^4 = \left[[u,v]^3\ {}^{u}([v,u]^3)\ {}^{u^2}[v,u],\ {}^{u^2}[u,v]\ {}^{u}([u,v]^2)\right]$

$$\left[{}^{u^2}[u,v]\ {}^{u}([u,v]^2)\,[u,v]^3, u\right][u^4,v]\ .$$

Passons au cas où n est impair ($n = 2k+1$). La relation (R) s'écrit aussi

$$[C, u]\,[u^n, v] = CD(1, n-3)(1, n-4)\ldots(1,1)(1,0)$$

avec $$C = (1, n-2)(2, n-3)(3, n-4)\ldots(n-1, 0)$$

et $$D = (-n+1, 1)\ldots(-4, n-4)(-3, n-3)(-1, n-2)\ .$$

Compte tenu de l'identité

$$[y, x]\,[x, z] = [yz^{-1}, zxz^{-1}]$$

on voit que l'élément

$$\Delta' = (-2k, 1)\ldots(-4, 2k-3)(-1, 2k-2)(3, 2k-3)$$
$$\ldots (2k, 0)(1, 2k-2)\,(1, 2k-3)\ldots(1, 0)$$

est le produit de 2 commutateurs. La transposition des blocs ⌊——⌋ et ⌊– – –⌋ diminue la valeur maximale de q de 2 unités, au prix d'un commutateur; au bout de $k-1$ opérations analogues il vient

$$\Delta' = (2k, 0)\prod_{i=1}^{k-1}[A_i, B_i]\,(1, 0) \qquad (A_i, B_i \in L,\ i = 1\ldots k-1)\ .$$

On termine en conjuguant par $(1, 0)$.

Exemple ($n = 3$).

$$[u, v]^3 = \left[{}^u[v, u]\,u^{-1},\ {}^{u^2}[u, v]\ {}^u([u, v]^2)\right]\ [u^3,\ v]\ .$$

2. Longueur des commutateurs dans les groupes libres

Cette partie est consacrée à l'étude des produits de commutateurs et de carrés dans les groupes libres. On y retrouve les résultats de [G-T] et [Cu] en utilisant directement l'algorithme de classification des surfaces.

2.1. Il convient avant tout de faire une petite remarque. Soit U un ensemble et $L(U)$ le groupe libre de base U. Si U est inclus dans V, on a pour tout élément γ de $L'(U)$:

$$c_{L(U)}(\gamma) = c_{L(V)}(\gamma)\ .$$

En effet toute relation dans $L(V)$ se projette dans $L(U)$ grâce à la rétraction évidente $L(V) \to L(U)$.

Donc, pour calculer $c(\gamma)$, *on peut se restreindre au sous-groupe engendré par ceux des générateurs qui interviennent dans l'écriture réduite de* γ.

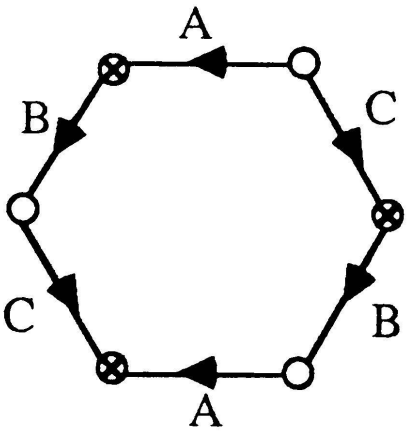
2.2. Afin de fixer le vocabulaire pour la suite, on rappelle quelques faits élémentaires concernant les surfaces fermées.

Considérons tout d'abord un polygone à $2n$ côtés, ou arêtes ($n \in \mathbf{N}^*$); la donnée d'un recollement par paires des arêtes, avec des orientations spécifiées, définit une surface fermée. Les identifications d'arêtes peuvent être codées par un mot, appelé *symbole,* de la forme

$$A_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots A_{i_{2n}}^{\varepsilon_{2n}} \qquad i_1, \dots, i_{2n} \in \{1, \dots, n\},\ \varepsilon_i = 1 \text{ ou } -1\ , \tag{3}$$

où chacune des n lettres $A_1 \dots A_n$ apparaît exactement deux fois, avec exposant 1 ou -1; on écrit alors ce mot cycliquement, dans le sens direct, autour du polygone et on identifie les arêtes qui portent la même lettre, l'orientation étant dictée par les exposants ε_i.

Exemple.



Symbole: $ABCA^{-1}B^{-1}C^{-1}$

FIGURE 1

Il sera important de penser qu'un symbole définit un élément du groupe libre $L(A_1, \dots, A_n)$. Les surfaces considérées ici seront *orientables* (sauf en 2.8) de sorte que chaque lettre A_i dans (3) apparaît une fois avec exposant $+1$ et une fois avec exposant -1. En particulier le symbole (3) appartient au groupe dérivé de $L(A_1, \dots, A_n)$.

On appellera *genre* d'un symbole celui de la surface qu'il définit. L'identification des arêtes induit une partition des sommets du polygone en *classes*; si p désigne le nombre de ces classes, le genre g est donné par

$$g = \frac{1}{2}(n + 1 - p)\ . \tag{4}$$

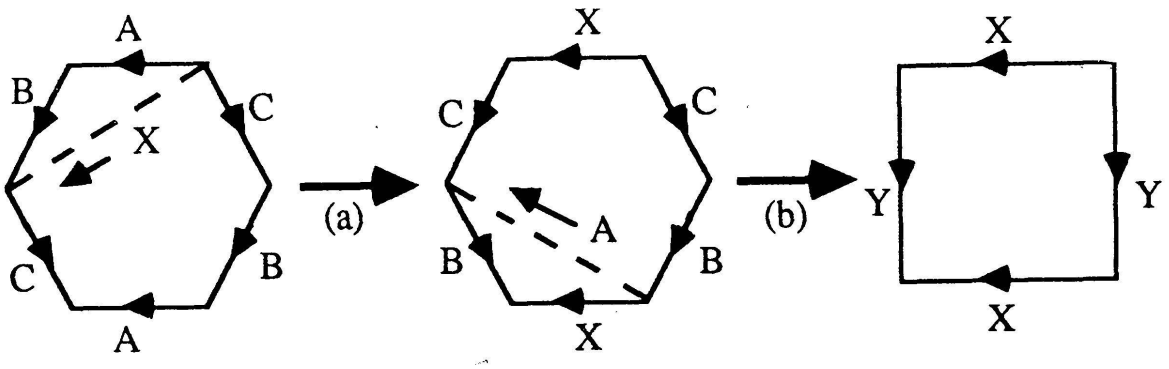
Ainsi dans l'exemple ci-dessus (voir fig. 1), on dénombre deux classes de sommets, figurées par $\bigcirc$ et $\otimes$, et le genre est égal à 1.

Deux symboles sont équivalents s'ils définissent la même surface. On montre, dans la preuve du théorème de classification des surfaces, que tout symbole (orientable) de genre $g \geqslant 1$ est équivalent au symbole canonique

$$X_1 Y_1 X_1^{-1} Y_1^{-1} \ldots X_g Y_g X_g^{-1} Y_g^{-1}$$

par découpages et recollements sur le polygone (voir [Ma 1]).

Exemple. $ABCA^{-1}B^{-1}C^{-1}$ (*genre* 1)



(a): On coupe suivant X et on recolle suivant A.

(b): On observe que C et B forment une seule arête Y.

FIGURE 2

2.3. SYMBOLES ASSOCIÉS ET LONGUEUR DES COMMUTATEURS

Fixons un produit de commutateurs γ d'un groupe libre $L = L(u_1, u_2, \ldots)$. Puisque la longueur des commutateurs est invariante par conjugaison, on peut supposer que γ admet une écriture cycliquement réduite, disons de longueur usuelle $2n$. Un symbole $\sigma = A_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots A_{i_{2n}}^{\varepsilon_{2n}}$ de longueur $2n$ est dit *associé* à γ si une substitution convenable de certains des générateurs de L (ou de leurs inverses) aux A_i définit un morphisme de $L(A_1, A_2, \ldots)$ dans L qui envoie σ sur γ. Voici par exemple deux symboles associés à $[u, v]^3$:

$ABA^{-1}B^{-1}CDC^{-1}D^{-1}EFE^{-1}F^{-1}$ par $A, B, C, D, E, F \to u, v, u, v, u, v$
$ABA^{-1}CDEFB^{-1}F^{-1}C^{-1}D^{-1}E^{-1}$ par $A, B, C, D, E, F \to u, v, v^{-1}, u, v, u^{-1}$.

Le nombre de symboles associés à un élément donné est évidemment *fini*. Les algorithmes de [G-T] et [Cu] peuvent alors se formuler ainsi:

THÉORÈME 2. *La longueur des commutateurs* $c(\gamma)$ *dans un groupe libre est égale au genre minimal des symboles associés à* γ.

Exemples.

1) La longueur des commutateurs d'un symbole est égale à son genre: par exemple $c([u_1, v_1] \dots [u_k, v_k]) = k$ dans $L(u_1, v_1, \dots, u_k, v_k)$ ([L-S] p. 55).

2) Eléments de petite longueur.

Quand la longueur usuelle (notée $2n$) de γ est petite, il est facile d'estimer le nombre de classes de sommets et leurs cardinaux. On en déduit les résultats suivants:

Si $2n = 6$, γ est toujours un commutateur puisqu'un symbole de longueur 6 est de genre 1; par exemple $uvwu^{-1}v^{-1}w^{-1} = [uv, wv]$ et $[u, v][v, w] = [uw^{-1}, wvw^{-1}]$.

Si $2n = 8$, alors $c(\gamma) = 1$ ou 2, et $c(\gamma) = 1$ si et seulement si γ contient un sous-mot xy de longueur 2 et son inverse $y^{-1}x^{-1}$.

Si $2n = 10$, alors $c(\gamma) = 1$ ou 2, et $c(\gamma) = 1$ si et seulement si γ contient deux sous-mots de longueur 2 (ayant peut-être une lettre commune) et leurs inverses.

2.4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

Soit m le genre minimal des symboles associés à γ.

Démonstration de $c(\gamma) \leqslant m$.

Pour tout symbole σ associé à γ, il existe par définition un morphisme qui envoie σ sur γ. Il suffit donc de montrer qu'un symbole (orientable) $\sigma \in L(A_1, \dots, A_n)$ de genre g est le produit de g commutateurs de $L(A_1, \dots, A_n)$. On observe pour cela que les opérations géométriques effectuées sur les polygones pour réduire le symbole se traduisent algébriquement. Ces opérations sont de deux types (voir [Ma 1]): éliminer une paire d'arêtes adjacentes AA^{-1}, et couper puis recoller. La première revient à simplifier le symbole comme mot en les A_i; couper revient à remplacer une portion du symbole par une nouvelle lettre, et recoller suivant l'arête étiquetée A_i revient à éliminer A_i. Le nouveau symbole défini par chacune de ces transformations s'envoie donc sur l'ancien par un morphisme de groupes. Et en mémorisant ces changements de variables au cours de la réduction du symbole, on peut exprimer le symbole canonique $[X_1, Y_1] \dots [X_g, Y_g]$ au moyen des lettres A_i du symbole intial σ, ce qui explicite σ comme produit de g commutateurs.

Exemple (voir 2.2 fig. 2). $\sigma = ABCA^{-1}B^{-1}C^{-1}$

(a): on pose $X = AB$ et on élimine A par $A^{-1} = BX^{-1}$

(b): on pose $Y = CB$.

D'où $ABCA^{-1}B^{-1}C^{-1} = XCBX^{-1}B^{-1}C^{-1} = XYX^{-1}Y^{-1} = [AB, CB]$.

Démonstration de $m \leqslant c(\gamma)$.

Supposons γ écrit comme produit de k commutateurs:

$$\gamma = \prod_{i=1}^{k} [a_i, b_i] \qquad (a_i, b_i \in L(u_1, u_2, \ldots)) \,. \tag{5}$$

Il s'agit de construire un symbole associé à γ de genre au plus k. Pour cela, on va définir une opération sur les symboles. Etant donné un symbole σ, on sélectionne deux lettres consécutives de σ, que l'on appelle W et X, puis on remplace W et X par deux *nouvelles* lettres Y et Z selon la règle suivante: changer respectivement W en Y, X en Y^{-1}, W^{-1} en Z et X^{-1} en Z^{-1} (voir fig. 3). Soit $\mathscr{E}(\sigma)$ le nouveau symbole obtenu. Noter que $\mathscr{E}(\sigma)$ n'est pas défini comme image de σ par un morphisme. Cependant:

Affirmation. La transformation $\mathscr{E}$ n'augmente pas le genre.

Il revient au même de voir que $\mathscr{E}$ ne diminue pas le nombre de classes de sommets. Vérifions-le avec la description géométrique de $\mathscr{E}$ sur les polygones correspondants:

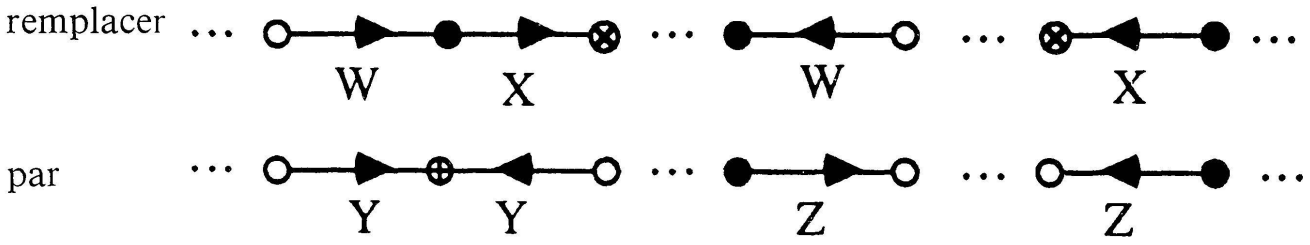


FIGURE 3

Il y a au plus trois classes de sommets de σ impliquées dans cette opération; ces classes se transforment en au moins deux classes car $\mathscr{E}(\sigma)$ comprend une nouvelle classe, notée $\oplus$, formée d'un seul sommet entre les deux arêtes Y (fig. 3). On peut donc supposer que les trois classes initiales $\bigcirc$, $\bullet$ et $\otimes$ sont distinctes. Alors dans $\mathscr{E}(\sigma)$ les classes $\bigcirc$ et $\bullet$ restent distinctes, puisqu'elles ne peuvent s'identifier que par des arêtes ne figurant pas sur le dessin, ce qui est exclu par hypothèse (les classes $\bigcirc$ et $\otimes$, quant à elles, sont identifiées). L'affirmation est ainsi démontrée.

Considérons maintenant la décomposition (5) de γ en produit de k commutateurs, et remplaçons dans l'écriture réduite de chaque a_i (resp. b_i) toutes les u_j et les u_j^{-1} par des lettres deux à deux distinctes:

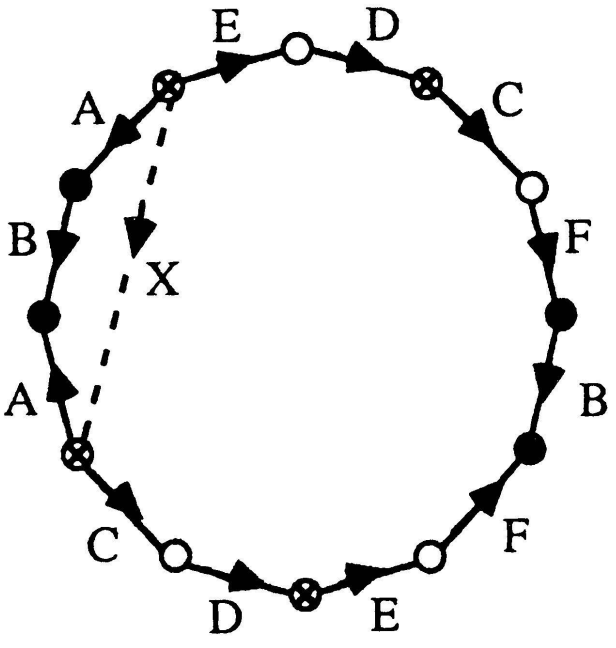
$$a_1 \to AB \dots EF,\ b_1 \to GH \dots KL,\ a_2 \to MN \dots QR,\ \text{etc.}$$

En développant les commutateurs, on obtient le symbole suivant:

$$\sigma = [AB \dots EF, GH \dots KL]\,[MN \dots QR, \dots] \dots$$
$$= AB \dots EFGH \dots KLF^{-1}E^{-1} \dots B^{-1}A^{-1}L^{-1}K^{-1} \dots H^{-1}G^{-1}MN \dots QR \dots$$

qui est de genre k (penser chaque segment $AB \dots EF$ provenant d'un a_i ou d'un b_i comme une arête A_i ou B_i). Evidemment, la longueur usuelle de σ est *a priori* bien plus grande que celle de γ; en effet, à chaque lettre de σ correspond un générateur u_j ou son inverse dans la formule (5) développée, mais celle-ci n'est pas en général une écriture réduite de γ. Appliquons alors $\mathscr{E}$ en choisissant pour W et X deux lettres successives de σ qui correspondent à une simplification ($u_j u_j^{-1}$ ou $u_j^{-1}u_j$) du mot sous-jacent. On peut ensuite effacer la paire YY^{-1} créée dans $\mathscr{E}(\sigma)$ sans changer le genre (dans la formule (4), n et p diminuent chacun d'une unité): cela donne un nouveau symbole qui comprend deux lettres de moins que σ. En épuisant par ce procédé les simplifications successives qui apparaissent dans la réduction de (5), on finit par obtenir un symbole de genre inférieur ou égal à k, et *associé à* γ.

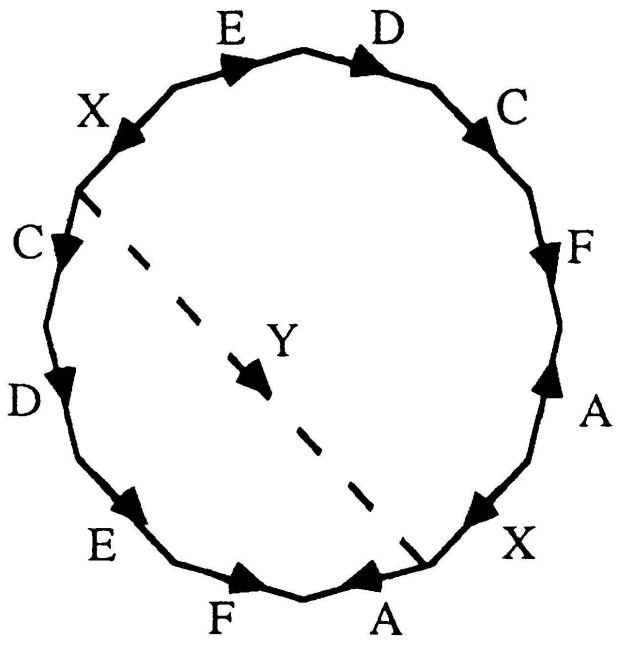
2.5. Pour compléter le théorème 2, il faut signaler que l'algorithme de réduction des symboles (aux symboles canoniques) donne des formules explicites. Par exemple on sait que $c([u,v]^3) = 2$ (voir 1 ou 2.7); voici comment décomposer $[u,v]^3$ en produit de deux commutateurs à partir du symbole $ABA^{-1}CDEFB^{-1}F^{-1}C^{-1}D^{-1}E^{-1}$:



$ABA^{-1}CDEFB^{-1}F^{-1}C^{-1}D^{-1}E^{-1}$

FIGURE 4

Couper suivant X, recoller suivant B [poser $X = ABA^{-1}$, éliminer B par $B^{-1} = A^{-1}X^{-1}A$] (fig. 4).



$XCDEFA^{-1}X^{-1}AF^{-1}C^{-1}D^{-1}E^{-1}$

FIGURE 5

Couper suivant Y, recoller suivant A [poser $Y = CDEFA^{-1}$, éliminer A par $A = Y^{-1}CDEF$] (fig. 5).

A ce stade, on se trouve avec le symbole $XYX^{-1}Y^{-1}CDEC^{-1}D^{-1}E^{-1}$. On réduit ensuite la partie $CDEC^{-1}D^{-1}E^{-1}$ comme à la figure 2, ce qui donne (voir 2.3):

$$ABA^{-1}CDEFB^{-1}F^{-1}C^{-1}D^{-1}E^{-1} = [ABA^{-1}, CDEFA^{-1}]\,[CD, ED]\ .$$

D'où l'identité:

$$[u, v]^3 = [uvu^{-1}, v^{-1}uvu^{-2}]\,[v^{-1}u, vu]\ .$$

2.6. CONSÉQUENCES DU THÉORÈME 2

COROLLAIRE 1 ([G-T]). *Pour tout élément* γ *de* L', *on a*

$$c(\gamma) \leqslant \frac{1}{4}(\log \gamma)\ ,$$

où $\log \gamma$ *est la longueur usuelle de* γ.

En effet, tout symbole a au moins une classe de sommets! Ce corollaire résulte donc de la formule du genre (4) avec $p \geqslant 1$ et $n = \frac{1}{2}\log \gamma$.

On peut aussi exploiter une majoration du nombre de classes de sommets, moyennant quelques définitions. Remarquons d'abord qu'un symbole σ admet une classe à deux sommets si et seulement si il contient un sous-mot XY et son inverse $Y^{-1}X^{-1}$; σ sera dit *simple* s'il ne vérifie pas cette condition. Un symbole (orientable) simple est appelé *mot simple alterné* dans la terminologie de [Cu].

Soit $M(A_1, A_2, \ldots)$ un mot réduit en les $A_i (i = 1, 2, \ldots)$. On dit qu'un élément γ de $L(u_1, u_2, \ldots)$ est obtenu par *substitution sans simplification* à partir de M s'il existe des mots réduits non vides $m_i (i = 1, 2, \ldots)$ en les $u_j (j = 1, 2, \ldots)$ tels que $M(m_1, m_2, \ldots)$ soit une écriture réduite de γ.

Enfin, on dira que γ est *cycliquement réduit* s'il admet une écriture cycliquement réduite.

COROLLAIRE 2 ([Ed], [Cu]). *Tout élément cycliquement réduit γ de L' est obtenu par substitution sans simplification à partir d'un mot simple alterné de longueur usuelle inférieure ou égale à* $12c(\gamma) - 6$.

Preuve. Un symbole σ associé à γ de genre minimal $c(\gamma)$ se laisse «simplifier» sans changement du genre: il suffit de remplacer autant de fois que c'est nécessaire XY par une nouvelle lettre Z et $Y^{-1}X^{-1}$ par Z^{-1}. On produit ainsi un symbole simple τ, et σ (donc γ) est obtenu par substitution sans simplification à partir de τ. Mais τ n'a pas de classe à un seul élément (τ est réduit), ni de classe à 2 éléments puisqu'il est simple. Le nombre de classes de sommets de τ est donc au plus égal à $\frac{1}{3}(\log \tau)$; d'où, d'après (4):

$$\log \tau \leqslant 4c(\gamma) - 2 + \frac{2}{3}(\log \tau) .$$

On en conclut que $\log \tau \leqslant 12c(\gamma) - 6$.

Exemple ([Wi]). Un commutateur cycliquement réduit s'obtient par substitution sans simplification à partir de $ABA^{-1}B^{-1}$ ou de $ABCA^{-1}B^{-1}C^{-1}$.

Le corollaire 2 a une application intéressante:

PROPOSITION ([Cu]). *Soit $\gamma \in L'$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Alors* $c(\gamma^n) > \frac{n}{6} + \frac{1}{2}$.

En particulier, *la longueur stable des groupes libres est minorée par* $1/6$.

Preuve. On peut supposer que γ est cycliquement réduit. Tout sous-mot m de γ^n dont l'inverse m^{-1} apparaît aussi dans γ^n doit vérifier l'inégalité

$\log m < \frac{1}{2}(\log \gamma)$. Sinon, par périodicité cyclique de γ^n, il existerait un sous-mot non vide m' constituant la fin de m et le début de m^{-1}, ce qui est absurde. D'après le corollaire 2, γ^n est de la forme $M(m_1, m_2, \ldots)$ avec $\log m_i < \frac{1}{2}(\log \gamma)(i = 1, 2, \ldots)$, et l'on a l'inégalité cherchée:

$$n(\log \gamma) = \log \gamma^n < \frac{1}{2} \log \gamma (12c(\gamma^n) - 6) .$$

2.7. Où l'on retrouve $c([u, v]^N) = E(N/2) + 1$

Pour illustrer encore le théorème 2, appliquons l'algorithme à notre exemple favori: $[u, v]^N (N \in \mathbf{N}^*)$.

Soit σ un symbole de la forme (3); une classe comprenant k sommets ($k \in \mathbf{N}^*$) est repérée dans σ par

$$X_1 X_2^{-1} \; X_2 X_3^{-1} \; \ldots \; X_k X_1^{-1}$$

(non forcément dans cet ordre) où les $X_i (i = 1, \ldots, k)$ appartiennent à l'ensemble $\{A_1, A_1^{-1}, \ldots, A_n, A_n^{-1}\}$. Ainsi, en examinant la succession des lettres dans $[u, v]^N$, on voit que toute classe de sommets d'un symbole associé à $[u, v]^N$ doit avoir au moins 4 éléments. Un tel symbole admet donc au plus N classes de sommets; compte tenu de la formule du genre (4), on en déduit l'inégalité:

$$c([u, v]^N) \geqslant E(N/2) + 1 .$$

Par ailleurs on construit facilement un symbole de genre $E(N/2) + 1$ associé à $[u, v]^N$. Il suffit de le faire pour N *impair*. Considérons le polygone à $4N$ côtés disposé comme suit (fig. 6):

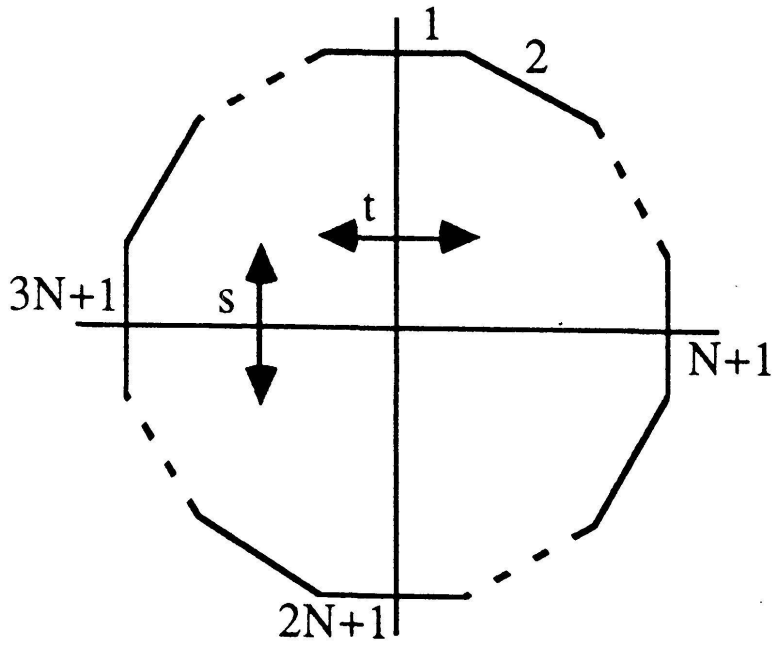


FIGURE 6

Les côtés étant numérotés comme sur la figure 6, identifions ceux qui sont impairs (resp. pairs) au moyen de la symétrie s (resp. t) d'axe horizontal (resp. vertical). Les classes de sommets sont les orbites de l'action des symétries s et t sur les sommets: elles ont toutes 4 éléments. Le genre du symbole ainsi défini est donc $\frac{1}{2}(N+1)$. De plus, il est associé à $[u, v]^N$ comme on le vérifie en écrivant ce mot autour du polygone.

2.8. Le nombre minimal de carrés

On s'intéresse ici aux produits de carrés, ce qui est naturel puisqu'ils admettent la même interprétation topologique que les produits de commutateurs (voir 1.2), au moyen de surfaces *non orientables.*

Soit $L = L(u_1, u_2, \ldots)$ un groupe libre et L^2 le sous-groupe de L engendré par les carrés. Il convient de remarquer que L^2 contient L' car tout commutateur est un produit de carrés:

$$[X, Y] = X^2(X^{-1}Y)^2Y^{-2}\,. \tag{6}$$

Un élément γ de L appartient donc à L^2 si et seulement si pour chaque générateur u_j, la somme des exposants de u_j dans l'écriture de γ est paire.

Les symboles considérés dans ce paragraphe seront quelconques: orientables ou non orientables. La *caractéristique d'Euler-Poincaré* d'un symbole $A_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots A_{i_{2n}}^{\varepsilon_{2n}}$ est par définition celle de la surface associée, i.e.:

$$\chi = 1 + p - n$$

où p désigne comme d'habitude le nombre de classes de sommets.

Pour tout élément γ de L^2, notons $\square(\gamma)$ le nombre minimal de carrés nécessaires pour exprimer γ. La méthode des paragraphes précédents permet de retrouver simplement le résultat ci-dessous ([Cu]; voir aussi [G-T]):

Théorème 2′. *Soit γ un élément de L^2 et $\chi(\gamma)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré maximale des symboles associés à γ. Deux éventualités sont possibles:*

1) *S'il existe un symbole associé σ non orientable avec $\chi(\sigma) = \chi(\gamma)$, alors*

$$\square(\gamma) = 2 - \chi(\gamma)\,.$$

2) *Sinon* $\square(\gamma) = 3 - \chi(\gamma) = 2c(\gamma) + 1$.

Exemples.

1) Quand γ appartient à $L^2 - L'$, on est toujours dans le premier cas; par exemple $\square(u_1^2 \dots u_k^2) = k \quad (k \in \mathbf{N}^*)$ ([L-N]).

2) Au contraire, si γ est un symbole orientable, alors $\square(\gamma) = 2c(\gamma) + 1$; ainsi $\square([u_1, v_1] \dots [u_k, v_k]) = 2k + 1$ dans $L(u_1, v_1, \dots, u_k, v_k)$ ([L-S] p. 56).

Preuve du théorème 2'.

Tout symbole non orientable $\sigma = A_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots A_{i_{2n}}^{\varepsilon_{2n}}$ est équivalent, par découpage et recollement, au symbole $X_1 X_1 \dots X_k X_k$ où $k = 2 - \chi(\sigma)$ ([Ma 1]). On en déduit (voir 2.4) que σ est le produit de k carrés dans $L(A_1, \dots, A_n)$.

Considérons maintenant un symbole $\sigma \in L(A_1, \dots, A_n)$ orientable de genre $g(\sigma)$, et posons $\tilde{\sigma} = A_0 A_0 \sigma \in L(A_0, A_1, \dots, A_n)$. On constate que $\chi(\tilde{\sigma}) = \chi(\sigma) - 1 = 1 - 2g(\sigma)$. D'après ce qui précède et en faisant $A_0 = 1$, on voit que le symbole σ est le produit de $2g(\sigma) + 1$ carrés de $L(A_1, \dots, A_n)$.

Exemple. $AABCB^{-1}C^{-1} = (A^2BA^{-1})^2 (AB^{-1}A^{-1}CA^{-1})^2 (AC^{-1})^2$

C'est le célèbre homéomorphisme $\mathbf{P} \# \mathbf{T} \approx \mathbf{P} \# \mathbf{P} \# \mathbf{P}$ où $\mathbf{P}$ est le plan projectif, $\mathbf{T}$ le tore et $\#$ la somme connexe. On a en particulier la formule (6) en faisant $A = 1$. Inversement, le même homéomorphisme permet de réécrire un produit de 3 carrés comme produit d'un carré et d'un commutateur:

$$X^2 Y^2 Z^2 = (X^2 Y^2 Z Y^{-1} X^{-1})^2 [XY, Z^{-1} Y^{-1}] .$$

On a clairement les majorations cherchées: $\square(\gamma)$ est majoré par $2 - \chi(\gamma)$ dans le premier cas du théorème 2', et par $3 - \chi(\gamma)$ dans le second. Il faut maintenant construire un symbole associé à γ à partir d'une décomposition en carrés: $\gamma = a_1^2 \dots a_k^2$ $(a_i \in L(a_1, a_2, \dots))$.

Comme à la preuve du théorème 2, on commence par remplacer tous les u_j et les u_j^{-1} de l'écriture réduite de chaque a_i par des lettres deux à deux distinctes:

$$a_1 \to AB \dots EF,\ a_2 \to GH \dots KL, \text{ etc.}$$

Puis en développant les carrés, on obtient un symbole

$$AB \dots EFAB \dots EFGH \dots KLGH \dots KL \dots \tag{7}$$

dont la caractéristique d'Euler-Poincaré est égale à $2 - k$. On doit ensuite étendre la transformation $\mathscr{C}$ de 2.4 aux symboles non orientables, mais cette fois-ci il faut tenir compte du mot sous-jacent et il y a trois cas possibles ($u = u_j$ ou u_j^{-1}):

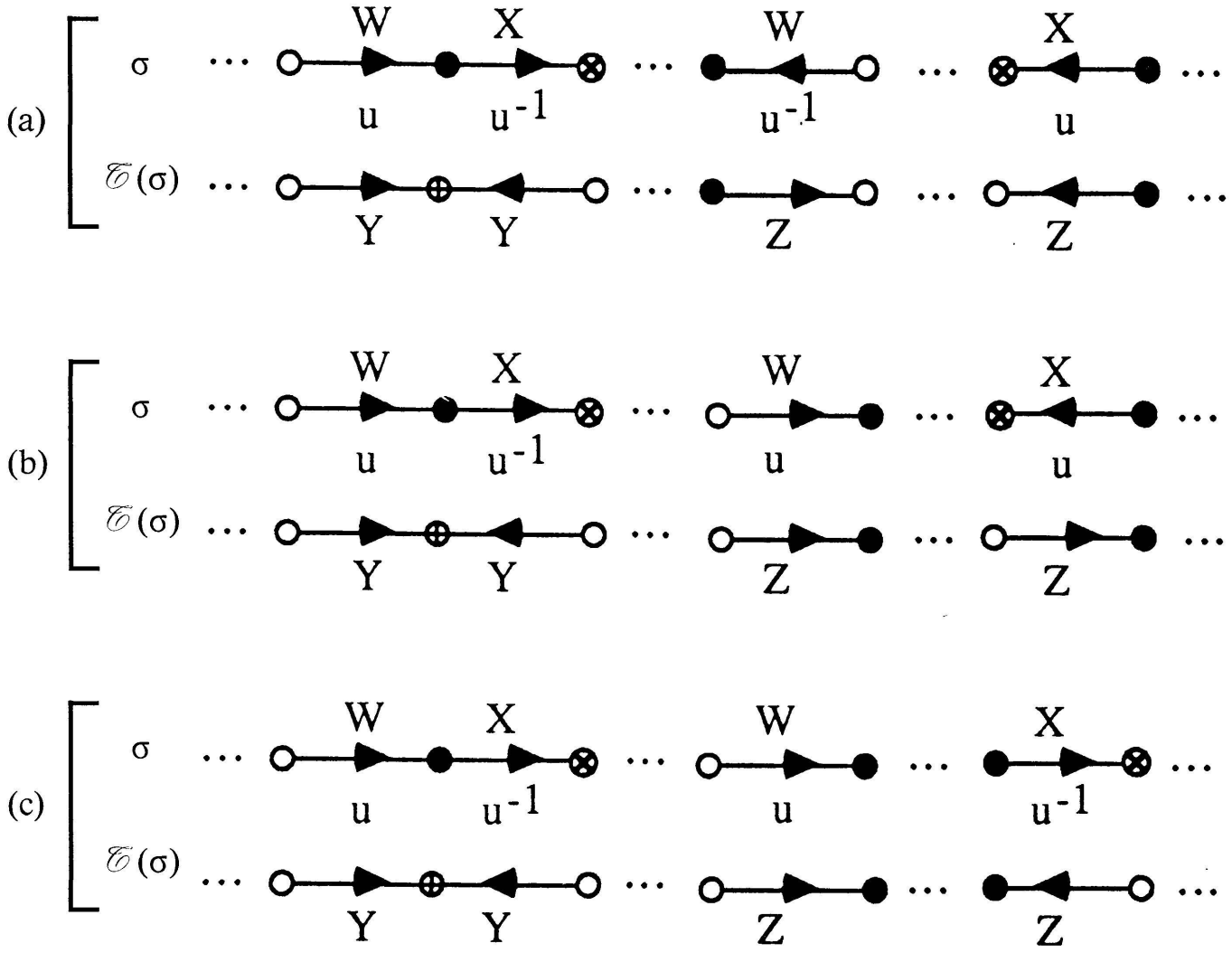


FIGURE 7

Le premier cas est celui de la figure 3: c'est le seul qui intervient quand les symboles sont orientables. En examinant la figure 7, on voit que $\mathscr{E}$ ne diminue pas le nombre de classes de sommets (même démonstration que pour l'affirmation de 2.4), donc

$$\chi(\mathscr{E}(\sigma)) \geqslant \chi(\sigma) .$$

Cependant, la transformation $\mathscr{E}$ possède une propriété supplémentaire qui sera cruciale pour la suite de la démonstration:

Affirmation. Si σ est non orientable et si $\mathscr{E}(\sigma)$ est orientable, alors

$$\chi(\mathscr{E}(\sigma)) \geqslant \chi(\sigma) + 1 .$$

Le passage de non orientable à orientable n'est possible que dans le cas (c) de la figure 7. L'identification des deux sommets $\otimes$ de la figure 7-(c) nécessite deux arêtes orientées dans le même sens (autres que les X). Comme par

hypothèse $\mathscr{E}(\sigma)$ est orientable, les arêtes W doivent donc intervenir pour identifier les sommets $\otimes$: on constate alors que les classes $\otimes$ et $\bigcirc$ sont forcément confondues. Finalement, $\mathscr{E}(\sigma)$ comprend une classe de plus que σ (que les classes $\bigcirc$ et $\bullet$ soient distinctes ou non).

Achevons maintenant la preuve du théorème 2′. A partir du symbole (7) ci-dessus on trouve (par le même procédé qu'en 2.4) un symbole σ associé à γ et vérifiant

$$\chi(\gamma) \geqslant \chi(\sigma) \geqslant 2 - k\,,$$

d'où $k \geqslant 2 - \chi(\gamma)$.

Cela prouve le théorème dans l'éventualité où $\chi(\gamma)$ est réalisé par un symbole non orientable, puisqu'on a déjà $\square(\gamma) \leqslant 2 - \chi(\gamma)$ dans ce cas. Dans l'autre cas, ou bien σ est non orientable et on a l'inégalité stricte $\chi(\gamma) > \chi(\sigma)$, ou bien σ est orientable et d'après l'affirmation précédente $\chi(\sigma) > 2 - k$; donc finalement $k \geqslant 3 - \chi(\gamma)$, et le théorème 2′ est démontré.

Pour terminer, il faut mentionner les analogues des corollaires 1 et 2 (§2.6).

COROLLAIRE 1′ ([G-T]). *Pour tout élément* γ *de* L^2, *on a*

$$\square(\gamma) \leqslant \frac{1}{2}\,(\log \gamma) + 1$$

(et même $\square(\gamma) \leqslant \frac{1}{2}(\log \gamma)$ *si* $\gamma \in L^2 - L'$*).*

Un symbole est simple s'il ne contient pas deux exemplaires d'un sous-mot XY, ni XY et son inverse. A l'exception du symbole AA, les classes de sommets d'un symbole simple ont au moins 3 éléments. Un *mot simple quadratique* est un symbole simple.

COROLLAIRE 2′ ([Ed], [Cu]). *Tout élément cycliquement réduit* γ *de* L^2 *tel que* $\square(\gamma) \geqslant 2$ *est obtenu par substitution sans simplification à partir d'un mot simple quadratique de longueur usuelle inférieure ou égale à* $6\square(\gamma) - 6$.

Les preuves des corollaires 1′ et 2′ sont identiques à celles des corollaires 1 et 2 (§2.6).

Remarque sur l'identité (6). Certains commutateurs sont produits de 2 carrés seulement (exemple: $[u, v^2] = (uvu^{-1})^2 v^{-2}$). Mais on peut montrer à l'aide du corollaire 2 (2.6) qu'un commutateur non trivial n'est jamais un carré dans un groupe libre.

3. Longueur stable et cohomologie bornée

Comme préliminaire on étudie l'espace des bords $B_1(\Gamma, \mathbf{R})$. Ceci est justifié par le fait qu'il relie longueur stable et cohomologie bornée: d'une part $B_1(\Gamma, \mathbf{R})$ est muni d'une norme comparable à la longueur stable (proposition 3.2), et d'autre part cet espace s'interprète par dualité à partir de la cohomologie bornée (3.4).

3.1. L'espace des bords

On rappelle la définition de l'homologie, ici à valeurs réelles, d'un groupe *discret* par la «bar-résolution». Soit $C_n(\Gamma, \mathbf{R})$ l'espace vectoriel réel de base $\Gamma^n (n \geqslant 1)$ et soit l'opérateur bord $\partial: C_{n+1}(\Gamma, \mathbf{R}) \to C_n(\Gamma, \mathbf{R})$ donné par

$$\partial(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_2, \ldots, x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (x_1, \ldots, x_i x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) + (-1)^{n+1} (x_1, \ldots, x_n) .$$

L'homologie $H_*(\Gamma, \mathbf{R})$ est alors celle du complexe

$$\cdots \xrightarrow{\partial} C_2(\Gamma, \mathbf{R}) \xrightarrow{\partial} C_1(\Gamma, \mathbf{R}) \xrightarrow{0} \mathbf{R} \xrightarrow{0} 0 \qquad (\mathscr{C}) .$$

L'espace des 1-bords, noté $B_1(\Gamma, \mathbf{R})$, est l'ensemble des combinaisons finies de la forme

$$\sum_i \alpha_i (x_i - x_i y_i + y_i) \qquad \alpha_i \in \mathbf{R}, x_i, y_i \in \Gamma .$$

Soit $Z_2(\Gamma, \mathbf{R})$ le noyau de $\partial: C_2(\Gamma, \mathbf{R}) \to C_1(\Gamma, \mathbf{R})$ (espace des 2-cycles). L'isomorphisme $B_1(\Gamma, \mathbf{R}) \approx C_2(\Gamma, \mathbf{R})/Z_2(\Gamma, \mathbf{R})$ induit sur $B_1(\Gamma, \mathbf{R})$ une norme simpliciale quotient:

$$\| b \|_B = \inf\{ \sum | \alpha_i | ;\ \partial(\sum_i \alpha_i (x_i, y_i)) = b \} \qquad (b \in B_1(\Gamma, \mathbf{R}))$$

borne inférieure sur les 2-chaînes de bord b.

Par ailleurs, les bords *entiers* $b \in B_1(\Gamma, \mathbf{Z})$ ont aussi une «norme» entière:

$$| b |_{\mathbf{Z}} = \inf\{ \sum | n_i | ; \partial(\sum_i n_i (x_i, y_i)) = b \quad \text{et} \quad n_i \in \mathbf{Z} \}$$

et la norme réelle de b est donnée par

$$\| b \|_B = \lim_{k \to \infty} \frac{| kb |_{\mathbf{Z}}}{k} \qquad ((b \in B_1(\Gamma, \mathbf{Z})) .$$

3.2. Longueur stable et norme sur l'espace des bords

Remarquons d'abord que *le groupe dérivé* Γ' *est inclus dans l'espace des bords* $B_1(\Gamma, \mathbf{R})$ car

$$[x, y] = \partial\{([x, y], y) + (xyx^{-1}, x) - (x, y)\} \qquad (x; y \in \Gamma) \,. \tag{8}$$

Il est donc naturel de comparer la longueur stable $\| \gamma \|$ d'un élément γ de Γ' avec sa norme $\| \gamma \|_B$ dans $B_1(\Gamma, \mathbf{R})$:

Proposition 3.2. $4 \| \gamma \| - 1 \leqslant \| \gamma \|_B \leqslant 4 \| \gamma \| + 1 \qquad (\gamma \in \Gamma') \,.$

Avant d'aborder la preuve de la proposition, voyons comment la combinatoire d'une relation

$$b = \partial\Big(\sum_i \varepsilon_i (x_i, y_i)\Big) \qquad \varepsilon_i = \pm 1$$

peut être décrite au moyen d'une surface. On pense à chaque $\varepsilon(x, y)$ qui intervient ci-dessus comme à un simplexe géométrique orienté (fig. 8):

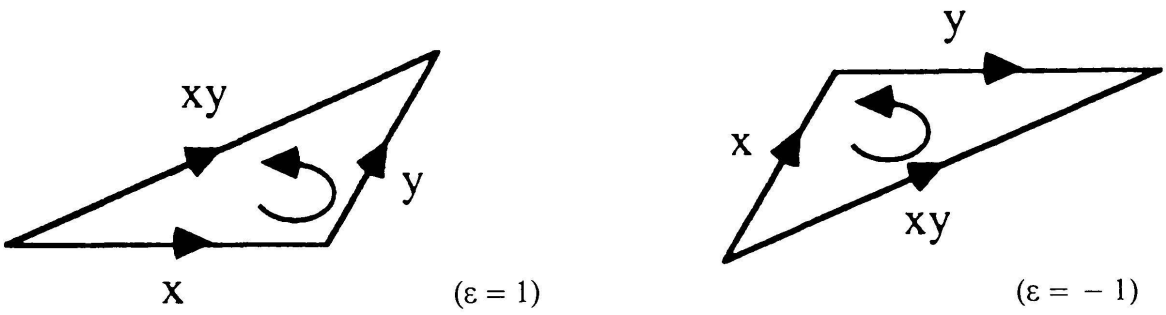


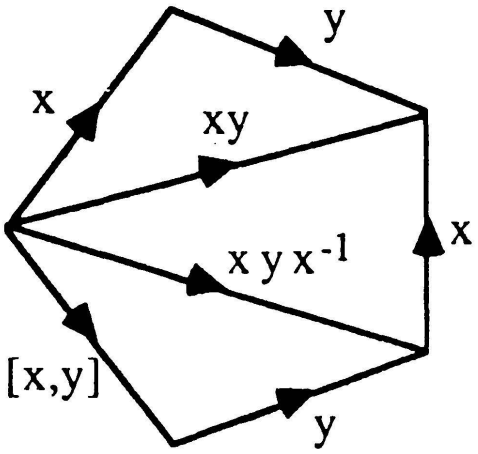
Figure 8

Choisissons une façon de grouper par paires $\{x, -x\}$ les arêtes qui s'annulent dans la relation; il suffit alors d'identifier 2 à 2 les arêtes ainsi sélectionnées pour construire une surface à bord (abstraite) Σ orientée et triangulée, *a priori* non connexe et non unique. Noter que si on pose

$$b = \sum_j n_j z_j \qquad (n_j \in \mathbf{Z},\ z_j \in \Gamma)$$

le nombre de composantes connexes du bord de Σ est au plus égal à $\sum_j | n_j |$.

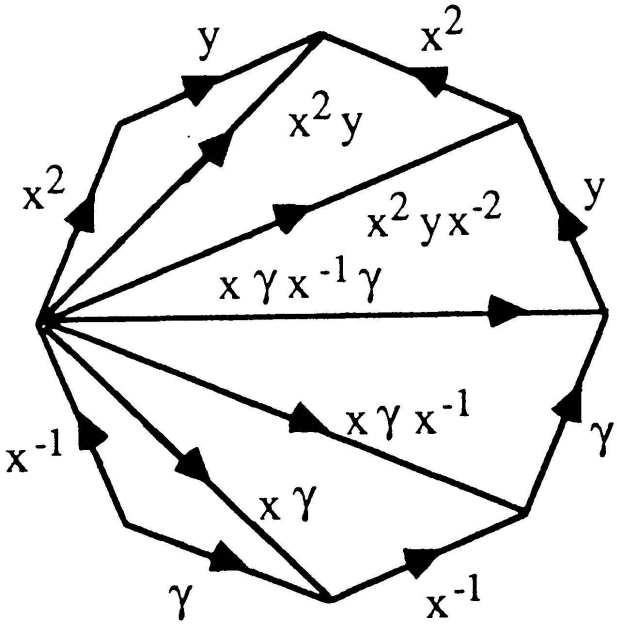
On dira que Σ borde b. Une surface bordant b et formée de $| b |_{\mathbf{Z}}$ simplexes sera appelée *minimisante* pour b. Ainsi le fait qu'un commutateur soit le bord de 3 simplexes s'illumine (fig. 9):



(surface de genre 1)

FIGURE 9

La longueur des commutateurs $c(\gamma)$ est le genre minimal d'une telle surface connexe bordant γ ($\gamma \in \Gamma'$). Voici encore un exemple: $2[x, y]$ bordé par une surface de genre 1 ayant 2 composantes du bord:



($\gamma = [x, y]$)

FIGURE 10

Preuve de la proposition. Comme $\| \gamma \|_B = \lim_{k \to \infty} (| k\gamma |_{\mathbf{Z}}/k)$ (voir 3.1), la preuve consiste à relier $| k\gamma |_{\mathbf{Z}}$ avec $c(\gamma^k)$ ($k \in \mathbf{N}^*$). Il faut bien distinguer les éléments γ^k et $k\gamma$ qui sont, par définition, linéairement indépendants dans $B_1(\Gamma, \mathbf{R})$.

D'après la relation (8) tout produit de N commutateurs est le bord de $4N - 1$ simplexes, d'où $|\gamma^k|_Z \leqslant 4c(\gamma^k) - 1$. En remplaçant le simplexe qui contient γ^k par k simplexes contenant γ (fig. 11), on voit que

$$|k\gamma|_Z \leqslant 4c(\gamma^k) + k - 2 .$$

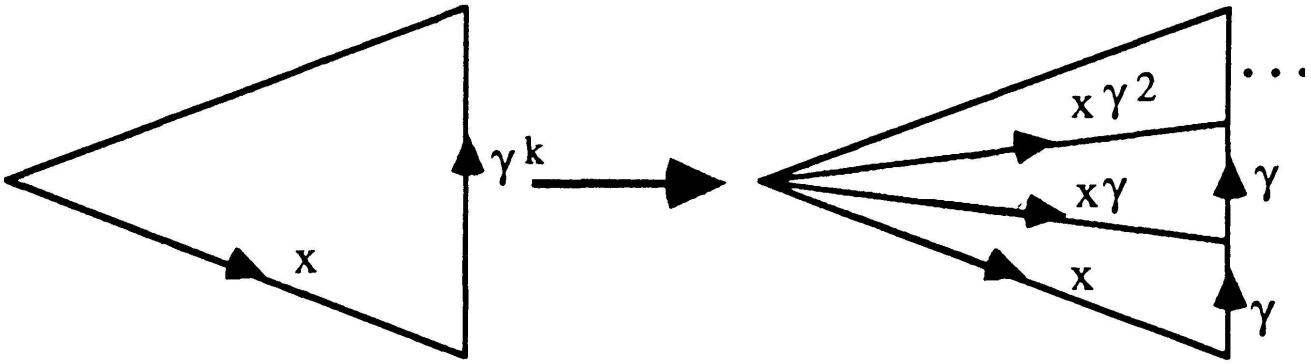


FIGURE 11

Il reste à établir une inégalité dans l'autre sens:

Affirmation. $4c(\gamma^k) - k \leqslant |k\gamma|_Z \quad (\gamma \in \Gamma')$.

Une fois que l'affirmation sera démontrée, la proposition résultera de l'encadrement:

$$4c(\gamma^k) - k \leqslant |k\gamma|_Z \leqslant 4c(\gamma^k) + k - 2 .$$

Preuve de l'affirmation. Supposons d'abord que $k\gamma$ est bordé par une surface Σ minimisante *connexe*. Soit g le genre de Σ et r le nombre de composantes connexes de son bord. Un petit calcul de caractéristique d'Euler-Poincaré permet de minorer $|k\gamma|_Z$. En effet considérons une triangulation de Σ qui comprend s sommets, a arêtes, f faces et exactement k arêtes sur le bord; on a les relations

$$2 - 2g - r = s - a + f \quad \text{et} \quad 3f = 2a - k .$$

D'où $f = 4g - 4 + 2r + 2s - k$. Sachant qu'une telle triangulation doit comprendre au moins k sommets (ceux qui sont sur le bord) on en déduit l'inégalité

$$f \geqslant 4g - 4 + 2r + k . \tag{9}$$

Notons par ailleurs $k_i (i = 1, \ldots, r)$ le nombre d'arêtes sur la i-ème composante du bord $(\sum_i k_i = k)$. L'hypothèse signifie algébriquement qu'un certain produit

$$^{a_1}(\gamma^{k_1}) \dots {}^{a_{r-1}}(\gamma^{k_{r-1}})\gamma^{k_r} \qquad (a_i \in \Gamma,\ i = 1, \dots, r-1)$$

est produit de g commutateurs de Γ (on rappelle la notation ${}^x y = xyx^{-1}$). L'identité

$$^{a_1}x_1\,{}^{a_2}x_2 \dots {}^{a_n}x_n = [a_1, x_1]^{x_1}[a_2, x_2] \dots {}^{(x_1x_2\dots x_{n-1})}[a_n, x_n]\, x_1 \dots x_n$$

montre alors que $g \geqslant c(\gamma^k) - r + 1$. Compte tenu de (9), il en résulte que

$$|\, k\gamma \,|_{\mathbf{Z}} \geqslant 4c(\gamma^k) - 2r + k\ .$$

Mais comme le nombre r de composantes connexes du bord de Σ est par construction au plus égal à k, on obtient finalement l'inégalité souhaitée.

Dans le cas général, une surface minimisante Σ se décompose en composantes connexes Σ_β ($\beta = 1, \dots, \alpha$) et l'on a

$$|\, k\gamma \,|_{\mathbf{Z}} = \sum_{\beta=1}^{\alpha} |\, k_\beta\gamma \,|_{\mathbf{Z}} \qquad (\sum_{\beta=1}^{\alpha} k_\beta = k)\ ,$$

où chaque terme correspond à une composante, minimisante elle aussi. En appliquant ce qui précède, on trouve donc

$$|\, k\gamma \,|_{\mathbf{Z}} \geqslant \sum_{\beta=1}^{\alpha} 4c(\gamma^{k_\beta}) - k\ .$$

L'inégalité évidente $\sum_{\beta=1}^{\alpha} c(\gamma^{k_\beta}) \geqslant c(\gamma^k)$ permet alors de conclure la preuve de l'affirmation.

3.3. Quasi-morphismes et cohomologie bornée

Après avoir rappelé la définition de la cohomologie bornée, on étudie le rapport entre les quasi-morphismes et le deuxième groupe de cohomologie bornée.

L'espace vectoriel $C_n(\Gamma, \mathbf{R})$ (voir 3.1) est muni de la norme simpliciale, de type l^1. Son dual, noté $C_b^n(\Gamma, \mathbf{R})$, qui est l'espace des applications *bornées* $F: \Gamma^n \to \mathbf{R}$, hérite donc d'une norme l^∞ :

$$\|\, F \,\| = \sup\{|\, F(x_1, \dots, x_n) \,|;\ (x_1, \dots, x_n) \in \Gamma^n\}\ .$$

Le complexe ($\mathscr{C}$) de 3.1 donne ainsi par dualité topologique un complexe dont l'homologie, avec sa semi-norme quotient, est par définition $H_b^*(\Gamma, \mathbf{R})$, la *cohomologie bornée* de Γ. Le dual algébrique de ($\mathscr{C}$) définit quant à lui la cohomologie usuelle $H^*(\Gamma, \mathbf{R})$ de Γ.

On a appelé quasi-morphisme toute application $f: \Gamma \to \mathbf{R}$ dont le cobord df est borné:

$$|df(x,y)| = |f(x) - f(xy) + f(y)| \leqslant \|df\| \quad (x,y \in \Gamma) .$$

Avec ce langage, le noyau de $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \to H^2(\Gamma, \mathbf{R})$ est naturellement l'espace des quasi-morphismes définis à l'addition d'un morphisme et d'une application bornée près. En fait chaque classe de ce noyau contient un élément privilégié: elle se représente de façon unique comme cobord $d\varphi$ d'un quasi-morphisme *homogène* $\varphi(\varphi(x^n) = n\varphi(x), x \in \Gamma, n \in \mathbf{Z})$.

PROPOSITION 3.3.1 ([Be]).

1) *Le noyau de* $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \to H^2(\Gamma, \mathbf{R})$ *est isomorphe par le cobord à l'espace des quasi-morphismes homogènes définis à l'addition d'un morphisme près.*

2) *Tout quasi-morphisme homogène* φ *est constant sur les classes de conjugaison* $(\varphi(xyx^{-1}) = \varphi(x); x, y \in \Gamma)$ *et vérifie la formule asymptotique:*

$$d\varphi(x,y) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \varphi((x^n y^n (xy)^{-n})) \quad (x,y \in \Gamma) .$$

Preuve (voir [Be]). Si f est un quasi-morphisme, la suite $(f(x^n))_{n \in \mathbf{N}}$ est presque sous-additive:

$$|f(x^{m+n}) - f(x^m) - f(x^n)| \leqslant \|df\| \quad (x \in \Gamma; m, n \in \mathbf{N}) .$$

On en déduit (voir [P-S]) que $\dfrac{f(x^n)}{n}$ converge et sa limite (homogène!), notée $\varphi(x)$, vérifie l'inégalité

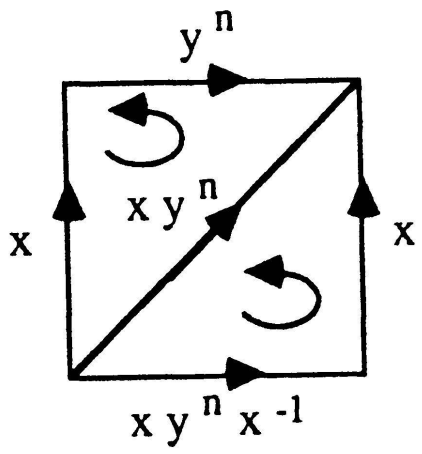
$$|\varphi(x) - \frac{f(x^n)}{n}| \leqslant \frac{\|df\|}{n} \quad (n \geqslant 1) .$$

En particulier,

$$|\varphi(x) - f(x)| \leqslant \|df\| \tag{10}$$

d'où il résulte que $d\varphi$ et df représentent la même classe de $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$.

On remarque ensuite que $xy^n x^{-1} - y^n (n \in \mathbf{Z})$ est le bord de 2 simplexes (fig. 12):



(cylindre)

FIGURE 12

Ceci montre que $\varphi(xy^nx^{-1}) - \varphi(y^n)$ est borné par $2\|d\varphi\|$, donc $\varphi(xyx^{-1}) - \varphi(y)$ (homogène en y) est nul.

La formule asymptotique est aussi une conséquence de l'homogénéité. Ecrivons d'abord la relation

$$d\varphi(x, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\{\varphi(x^n) + \varphi(y^n) - \varphi((xy)^n)\} .$$

Comme $x^n + y^n - (xy)^n - x^ny^n(xy)^{-n}$ est le bord de 3 simplexes, cette limite est égale à $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\{\varphi(x^ny^n(xy)^{-n})\}$.

Les quasi-morphismes décrivent, par définition, le noyau de $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \to H^2(\Gamma, \mathbf{R})$, qui n'est qu'une partie de $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$. Cependant, dans beaucoup de cas intéressants, tels que les groupes fondamentaux de polyèdres finis, ce noyau est de codimension finie dans $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$. De toutes façons, on peut toujours décrire $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$ au moyen des quasi-morphismes définis sur un groupe ad hoc:

PROPOSITION 3.3.2. *Tout groupe* Γ *admet une extension centrale* $E \to \Gamma$ *qui induit une isométrie:* $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \approx \mathrm{Ker}(H_b^2(E, \mathbf{R}) \to H^2(E, \mathbf{R}))$ *(en fait ce noyau est égal à* $H_b^2(E, \mathbf{R})$ *tout entier).*

Preuve. Ecrivons Γ comme quotient d'un groupe libre L par un sous-groupe normal R. On a alors une suite exacte

$$0 \to R/[L, R] \to L/[L, R] \to L/R = \Gamma \to 1 .$$

Cette suite définit une extension centrale $p: E = L/[L, R] \to \Gamma$, qui dépend du choix de la présentation de Γ.

Comme le noyau de l'extension E est abélien (donc moyennable) on sait d'après un théorème général sur la cohomologie bornée ([Iv]), que p induit une isométrie $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \approx H_b^2(E, \mathbf{R})$. Pour établir la proposition, il suffit donc de prouver que l'application $p^*: H^2(\Gamma, \mathbf{R}) \to H^2(E, \mathbf{R})$ induite par p en cohomologie usuelle est nulle.

Soit c un 2-cocycle normalisé sur Γ, à valeurs réelles; le cocycle p^*c définit une extension centrale $\pi: \mathscr{E} \to E$. Plus précisément, $\mathscr{E}$ est l'ensemble $\mathbf{R} \times E$ muni de la loi de groupe:

$$(\alpha, X)(\beta, Y) = (\alpha + \beta + c(p(X), p(Y)), XY) \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{R} \text{ et } X, Y \in E) ,$$

et π est la projection $\mathbf{R} \times E \to E$. Il est facile de vérifier que l'extension $p \circ \pi: \mathscr{E} \to \Gamma$ est centrale. Comme L est un groupe libre, il existe un morphisme de groupes $L \to E$ au-dessus de Γ; puisque l'extension $p \circ \pi$ est centrale, ce morphisme induit un morphisme $u: E \to \mathscr{E}$ au-dessus de Γ. On a donc

$$u(X) = (\alpha(X), a(X)X) \qquad \alpha(X) \in \mathbf{R},\ a(X) \in \operatorname{Ker} p .$$

En explicitant le fait que u est un morphisme de groupes, on trouve la relation

$$\alpha(XY) = \alpha(X) + \alpha(Y) + c(p(X), p(Y)) \qquad (X, Y \in E) ,$$

c'est-à-dire $p^*c = -d\alpha$.

Il est intéressant de noter que dans notre situation, l'isométrie $p_b^*: H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \approx H_b^2(E, \mathbf{R})$ admet un inverse explicite. Cela est dû au fait que le noyau A de l'extension E est central. En effet si φ est quasi-morphisme *homogène* $E \to \mathbf{R}$, on a d'après la formule asymptotique (Prop. 3.3.1-2)):

$$d\varphi(X, a) = 0 \qquad X \in E, a \in A .$$

On en déduit que $d\varphi(aX, bY) = d\varphi(X, Y)$ pour $X, Y \in E$ et $a, b \in A$. Cette propriété permet d'associer à tout quasi-morphisme homogène φ sur E un *2-cocycle* borné sur Γ en posant

$$c(x, y) = d\varphi(X, Y) \qquad x, y \in \Gamma , \tag{11}$$

où X et Y sont des relevés *quelconques* de x et y dans E. D'où une application $H_b^2(E, \mathbf{R}) \to H_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$ qui est visiblement inverse à droite de p_b^*.

Remarque. Le fait que la semi-norme sur $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$ est une vraie norme ([M-M], [Mit]) apparaît clairement dans notre contexte. Pour une classe c représentable par le cobord df d'un quasi-morphisme, la relation (10) implique $\|d\varphi\| \leqslant 4\|df\|$, indépendamment du choix de f (rappel: $\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} f(x^n)/n$);

donc, si la semi-norme de c est nulle, φ est un morphisme et c est nulle. Le cas général résulte ensuite de la proposition 3.3.2.

3.4. Longueur stable et quasi-morphismes

Dans ce paragraphe, le dual de l'espace des bords $B_1(\Gamma, \mathbf{R})$ est décrit au moyen des quasi-morphismes: le théorème de Hahn-Banach permet alors (avec la proposition 3.2) d'exprimer la longueur stable par une formule de dualité:

Proposition 3.4. *Pour tout élément* γ *de* Γ' *on a la relation*

$$4 \| \gamma \| = \sup_f \frac{|\varphi(\gamma)|}{\| df \|}$$

où f *décrit l'ensemble des quasi-morphismes et* $\varphi(\gamma) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} f(\gamma^n)$.

Ce résultat montre en particulier que la minoration de la longueur des commutateurs par les quasi-morphismes (lemme 1.1) est optimale pour la longueur stable.

Preuve. L'espace des bords $B_1(\Gamma, \mathbf{R})$ a été considéré comme $C_2(\Gamma, \mathbf{R})/Z_2(\Gamma, \mathbf{R})$ avec la norme quotient: son dual est l'espace des quasi-morphismes f modulo les morphismes, muni de la norme $\| df \|$. D'après le théorème de Hahn-Banach, la norme d'un élément quelconque b de $B_1(\Gamma, \mathbf{R})$ est donnée par

$$\| b \|_B = \sup_f \frac{|f(b)|}{\| df \|}.$$

Considérons maintenant un élément γ de Γ'. La relation entre $\| \gamma \|$ et $\| \gamma \|_B$ (prop. 3.2) et l'inégalité (10) montrent alors que $4 \| \gamma \| - \sup_f \frac{|\varphi(\gamma)|}{\| df \|}$ est borné par une constante, donc nul par homogénéité.

Corollaire 1. *L'application* $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \to H^2(\Gamma, \mathbf{R})$ *est injective si et seulement si la longueur stable est nulle sur* Γ'.

En effet, la longueur stable est nulle si et seulement si tout quasi-morphisme homogène φ est nul sur Γ', ce qui équivaut, d'après la formule asymptotique, à $d\varphi = 0$.

COROLLAIRE 2. *La longueur stable d'un groupe moyennable est nulle.*

On pourrait invoquer le fait que la cohomologie bornée d'un tel groupe est triviale ([Gr 2] ou [Iv]). Cependant il est facile de vérifier (voir [Be]) à l'aide d'une moyenne que tout quasi-morphisme sur un groupe moyennable est somme d'un morphisme et d'une application bornée.

Remarque. Il existe d'autres groupes ayant $\| \| \equiv 0$; ainsi $SL_3(\mathbf{Z})$ n'est pas moyennable et vérifie $c < \infty$ ([Ne]).

3.5. LONGUEUR STABLE ET GENRE DES CLASSES DE $H_2(\Gamma, \mathbf{Z})$

La formule de Hopf (voir ci-dessous) donne une description géométrique des classes de $H_2(\Gamma, \mathbf{Z})$ au moyen des surfaces fermées: pour tout élément α de $H_2(\Gamma, \mathbf{Z})$, il existe une surface fermée S_g de genre g et un morphisme de $\pi_1(S_g)$ dans Γ qui envoie la classe fondamentale de S_g sur α. Le *genre* de α est le genre minimal d'une telle surface; on le note $g(\alpha)$.

Il se trouve que le genre d'une classe s'interprète comme nombre minimal de commutateurs grâce à l'extension de Hopf (12); je remercie Etienne Ghys qui m'a expliqué ce fait. Cela permet d'illustrer la formule de dualité du paragraphe 3.4 en retrouvant l'égalité suivante, qui relie le genre des classes et la norme simpliciale $\| \|_H$ de $H_2(\Gamma, \mathbf{R})$:

PROPOSITION 3.5. ([B-G] prop. 1-9). *Pour toute classe* $\alpha \in H_2(\Gamma, \mathbf{Z})$, *on a la relation*

$$\| \alpha \|_H = 4 \lim_{n \to \infty} \frac{g(n\alpha)}{n} .$$

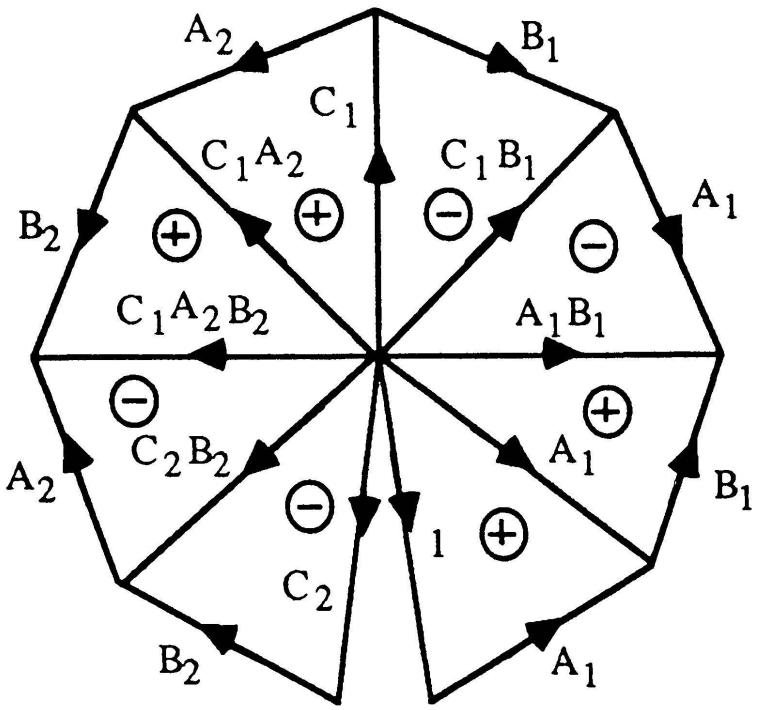
Preuve. Si Γ est égal à L/R, où L est libre, on a une extension centrale

$$0 \to R \cap [L, L]/[L, R] \to [L, L]/[L, R] \to L/R = \Gamma \to 1 \tag{12}$$

dont le noyau est isomorphe à $H_2(\Gamma, \mathbf{Z})$ (c'est la formule de Hopf). Noter que pour un groupe parfait, l'extension ci-dessus est l'extension centrale universelle de Γ ([Mil 2] § 5). L'isomorphisme $R \cap [L, L]/[L, R] \approx H_2(\Gamma, \mathbf{Z})$ peut s'expliciter comme suit (voir [Brw] p. 46). Considérons la 2-chaîne du groupe libre L définie par

$$z(A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g)$$
$$= \sum_{i=1}^{g} \{(C_{i-1}, A_i) + (C_{i-1}A_i, B_i) - (C_{i-1}A_iB_iA_i^{-1}, B_i) - (C_i, B_i)\}$$

où $g \in \mathbf{N}^*, A_i, B_i \in L$ et $C_i = [A_1, B_1] \ldots [A_i, B_i]$ $i = 1, \ldots, g$ (fig. 13).



($g = 2$)

FIGURE 13

Le bord de $z(A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g)$ est égal à $1 - [A_1, B_1] \ldots [A_g, B_g]$. On obtient l'isomorphisme de Hopf en associant à tout élément $[A_1, B_1] \ldots [A_g, B_g]$ de $[L, L] \cap R$ le 2-*cycle* $z(a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g)$ sur Γ, a_i et b_i étant les projections de A_i et B_i dans Γ.

Ainsi le second groupe d'homologie $H_2(\Gamma, \mathbf{Z})$ apparaît comme sous-groupe du groupe dérivé E' de $E = L/[L, R]$, et le genre d'une 2-classe α (resp. $\lim_{n \to \infty} (g(n\alpha)/n)$) est exactement sa longueur des commutateurs (resp. sa longueur stable) dans E, quand on la considère comme élément de E'.

La (semi-)norme simpliciale de $H_2(\Gamma, \mathbf{R})$ s'exprime par dualité grâce au théorème de Hahn-Banach:

$$\| \alpha \|_H = \sup_c \frac{| c(\alpha) |}{\| c \|} \qquad (\alpha \in H_2(\Gamma, \mathbf{Z}))$$

où c décrit $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$. D'après 3.4, il en est de même pour la longueur stable de α, vue comme élément de E':

$$4 \| \alpha \| = \sup_\Phi \frac{| \varphi(\alpha) |}{\| \Phi \|}$$

où Φ décrit $\mathrm{Ker}(H_b^2(E, \mathbf{R}) \to H^2(E, \mathbf{R}))\,(= H_b^2(E, \mathbf{R}))$, $\| \Phi \|$ désigne la norme naturelle de Φ dans $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$, et $d\varphi$ son représentant canonique (prop. 3.3.1). Pour établir la proposition, il suffira d'identifier les éléments respectifs de ces deux formules de dualité. On a vu en 3.3 que Φ et c se correspondaient par isométrie. De plus si l'élément $\gamma = [A_1, B_1] \ldots [A_g, B_g]$ de E' correspond à la

classe $\alpha = z(a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g)$ (a_i, b_i sont les projections de A_i, B_i dans Γ et $[a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g] = 1$), alors d'après 3.3 (rel. (11)):

$$c(\alpha) = d\varphi(z(A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g)) = \varphi(\partial\{z(A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g)\}) = -\varphi(\gamma) .$$

On en conclut que $4 \| [A_1, B_1] \ldots [A_g, B_g] \| = \| \alpha \|_H$, ce qu'il fallait démontrer.

3.6. Le théorème de dualité

Rappelons que chaque classe c du noyau de $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \to H^2(\Gamma, \mathbf{R})$ possède un représentant privilégié $d\varphi$ où φ est un quasi-morphisme homogène; on peut se demander s'il existe un rapport entre $\| d\varphi \|$ et la norme $\| c \|_b$ de c dans $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$. Pour cela considérons l'espace K des quasi-morphismes homogènes définis à l'addition d'un morphisme près. L'identification de K avec $\mathrm{Ker}(H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \to H^2(\Gamma, \mathbf{R}))$ provient de la décomposition en somme directe (lire quasi-morphismes pour $q - m$):

$$\{q - m\} = \{q - m \text{ homogènes}\} \oplus \{q - m \text{ bornés}\} .$$

On voit ainsi que $\| d\varphi \|$ est une norme *induite,* tandis que $\| c \|_b$ est une norme *quotient.* Comme le montrent la définition de $\| c \|_b$ et la relation (10), ces deux normes sont comparables:

$$\| c \|_b \leqslant \| d\varphi \| \leqslant 4 \| c \|_b .$$

Mais en estimant la longueur des commutateurs de l'élément $x^n y^n (xy)^{-n}$ qui intervient dans la formule asymptotique (lemme 3.6), on trouve une inégalité plus fine:

$$\| d\varphi \| \leqslant 2 \| c \|_b .$$

On verra des exemples où $\| d\varphi \| = 2 \| c \|_b$ (3.8).

Cependant il y a une autre norme sur K, définie par

$$\| \varphi \|_\Gamma = \sup\{ | \varphi[x, y] | ; x, y \in \Gamma \} \qquad (\varphi \in K) .$$

L'intérêt de cette norme naturelle réside dans le fait qu'elle est reliée à la longueur stable par dualité:

Théorème de dualité. *Pour tout élément* γ *de* Γ' *on a la relation*

$$\| \gamma \| = \frac{1}{2} \sup_{\varphi \in K} \frac{| \varphi(\gamma) |}{\| \varphi \|_\Gamma} .$$

Nous commençons par établir le résultat suivant qui est le point clé de la démonstration:

LEMME 3.6. *Dans le groupe libre* $L(u,v)$ *on a*

$$c(u^n v^n (uv)^{-n}) = E^*\left(\frac{n-1}{2}\right) \qquad (n \geqslant 1)$$

où E^* *est la partie entière supérieure.*

Preuve. L'élément $u^{n+1}v^{n+1}(uv)^{-n-1}$ se réduit cycliquement à $u^n v^n (vu)^{-n}$. Tout symbole associé à ce dernier élément aura au plus 1 classe à 2 sommets et 2 classes à 3 sommets, les autres classes comprenant au moins 4 sommets. Cela conduit à l'estimation:

$$c(u^n v^n (vu)^{-n}) \geqslant n/2 \ .$$

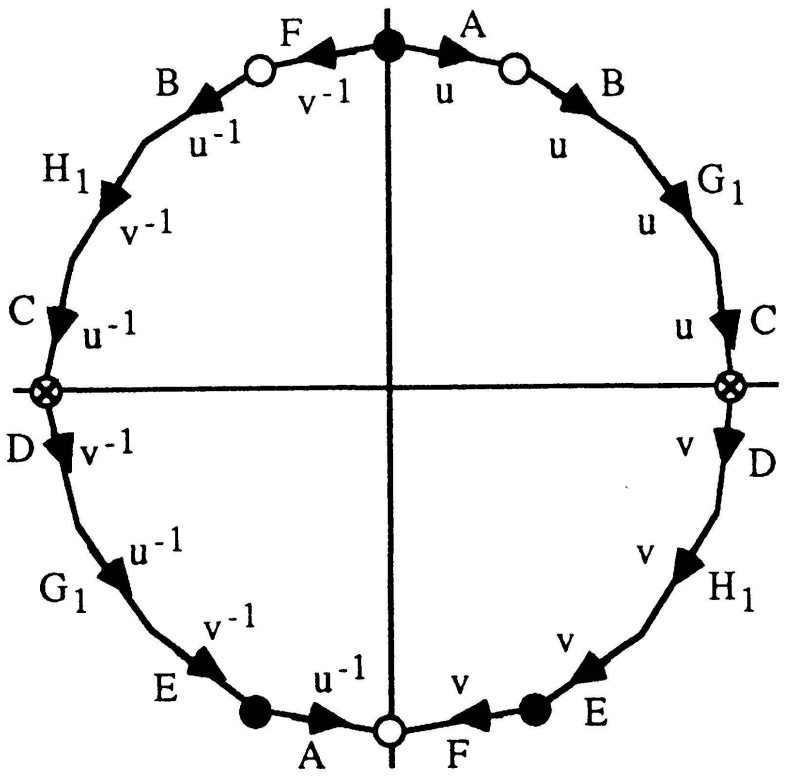
Pour établir une inégalité dans l'autre sens, il suffit d'examiner le cas où n est pair puisque

$$u^{2k+1}v^{2k+1}(vu)^{-2k-1} = {}^u(u^{2k}v^{2k}(vu)^{-2k})\,[v^{-1}, (vu)^{2k+1}] \ .$$

Posons $n = 2k$ et considérons le symbole σ_k:

$$\begin{array}{l} ABG_1G_2 \ldots G_{2k-3}CDH_1H_2 \ldots H_{2k-3}EF/ \text{ (milieu du mot)} \\ u\ u\ u\ u\ \ldots\ u\ u\ v\ v\ v\ \ldots\ v\ v\ v \\ A^{-1}E^{-1}G_{2k-3}^{-1}H_{2k-4}^{-1} \ldots H_2^{-1}G_1^{-1}D^{-1}C^{-1}H_{2k-3}^{-1}G_{2k-4}^{-1} \ldots G_2^{-1}H_1^{-1}B^{-1}F^{-1} \\ u^{-1}v^{-1}u^{-1}v^{-1} \quad \ldots v^{-1}u^{-1}v^{-1}\ u^{-1}v^{-1}u^{-1} \quad \ldots u^{-1}v^{-1}u^{-1}v^{-1} \end{array}$$

(le bloc ⌊____⌋ est formé de k fois $u^{-1}v^{-1}$). Ou encore, géométriquement:



($k = 2$)

FIGURE 14

On identifie deux à deux toutes les arêtes possibles (i.e. de façon compatible avec le mot $u^n v^n (vu)^n$) par la symétrie centrale; les autres arêtes sont identifiées par la symétrie d'axe vertical (fig. 14). Ce symbole σ_k comprend une classe $\otimes$ de 2 sommets $(CD, D^{-1}C^{-1})$, 2 classes $\bigcirc$ et $\bullet$ de 3 sommets $(AB, B^{-1}F^{-1}, FA^{-1}$ et $F^{-1}A, A^{-1}E^{-1}, EF)$ et $2k$-2 classes de 4 sommets. Son genre est donc égal à k.

Le lemme permet de comparer la norme $\| \varphi \|_\Gamma$ avec

$$\| d\varphi \|_\Gamma = \sup \{ | d\varphi(x, y) | ; x, y \in \Gamma \} ,$$

et même avec la norme de $d\varphi$ restreint au groupe dérivé:

PROPOSITION (égalité des normes). *Pour tout* $\varphi \in K$:

$$\| d\varphi \|_\Gamma = \| \varphi \|_\Gamma = \| d\varphi \|_{\Gamma'} .$$

Preuve. Sachant que φ est homogène et constant sur les classes de conjugaison, on a

$$\varphi([x, y]) = - d\varphi(xyx^{-1}, y^{-1}) \quad (x, y \in \Gamma) ,$$

d'où $\| \varphi \|_\Gamma \leqslant \| d\varphi \|_\Gamma$. D'après le lemme 3.6, l'élément $x^{2k+1} y^{2k+1} (xy)^{-2k-1}$ est le produit de k commutateurs; il suit que

$$\varphi(x^{2k+1} y^{2k+1} (xy)^{-2k-1}) \leqslant k \| \varphi \|_\Gamma + (k-1) \| d\varphi \|_{\Gamma'} .$$

La formule asymptotique montre alors que

$$| d\varphi(x, y) | \leqslant \frac{1}{2} (\| \varphi \|_\Gamma + \| d\varphi \|_{\Gamma'}) .$$

Comme $\| \varphi \|_\Gamma$ et $\| d\varphi \|_{\Gamma'}$ sont majorés par $\| d\varphi \|_\Gamma$, on en déduit l'égalité cherchée.

Preuve du théorème. Dans la formule asymptotique on peut remplacer φ par f car $\varphi - f$ est borné:

$$d\varphi(x, y) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} (f(x^n y^n (xy)^{-n})) .$$

Si f est antisymétrique, la quantité $f(x^n y^n (xy)^{-n})$ se majore comme en 1.1 par $\| df \| (4c(x^n y^n (xy)^{-n}) - 1)$, et on voit d'après le lemme 3.6 que

$$\| d\varphi \|_\Gamma \leqslant 2 \| df \| .$$

Rappelons maintenant que la longueur stable s'exprime par dualité (Prop. 3.4):

$$4 \| \gamma \| = \sup_f \frac{| \varphi(\gamma) |}{\| df \|} \quad (\gamma \in \Gamma') .$$

Grâce à la remarque 2) de 1.1, cette égalité est encore valable quand f décrit seulement l'espace des quasi-morphismes antisymétriques. Mais on a vu que $\| \varphi \|_\Gamma \leqslant \| d\varphi \|_\Gamma \leqslant 2 \| df \|$, d'où

$$\| \gamma \| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{\varphi \in K} \frac{| \varphi(\gamma) |}{\| \varphi \|_\Gamma} .$$

D'autre part, on a clairement:

$$| \varphi(\gamma) | = \frac{1}{n} | \varphi(\gamma^n) | \leqslant \frac{1}{n} \{ c(\gamma^n) \| \varphi \|_\Gamma + (c(\gamma^n) - 1) \| d\varphi \|_\Gamma \} ,$$

dont on déduit l'inégalité

$$| \varphi(\gamma) | \leqslant 2 \| \gamma \| \| \varphi \|_\Gamma \quad (\varphi \in K, \gamma \in \Gamma')$$

qui permet d'achever la preuve du théorème de dualité.

Remarques.

1) Soit Q_Γ le quotient de $B_1(\Gamma, \mathbf{R})$ par l'adhérence du sous-espace engendré par $\{\gamma^n - n\gamma ; \gamma \in \Gamma', n \in \mathbf{Z}\}$. Comme K_Γ est naturellement le dual de Q_Γ, on peut reformuler le théorème de dualité: $\| \gamma \|_Q = 2 \| \gamma \|$.

2) La proposition «égalité des normes» montre que $\| \varphi \|_\Gamma$ ne dépend que des valeurs de φ sur le n-ième groupe dérivé $\Gamma^{(n)}$ de Γ, *n aussi grand que l'on veut*; en d'autres termes, l'espace Q_Γ est engendré par les images des commutateurs d'éléments de $\Gamma^{(n)}$, n aussi grand que l'on veut. On retrouve en particulier le fait que la longueur stable des groupes résolubles est nulle.

3) D'après cette même proposition, la restriction définit une injection isométrique $(K_\Gamma, \| \varphi \|_\Gamma) \to (K_{\Gamma'}, \| \varphi \|_{\Gamma'})$. C'est l'analogue d'une propriété générale de la cohomologie bornée: si le quotient de Γ par un sous-groupe normal Γ_1 est moyennable, alors $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \to H_b^2(\Gamma_1, \mathbf{R})$ est une injection isométrique ([Gr 2]).

3.7. Propriétés de la longueur stable

On a regroupé dans ce paragraphe quelques propriétés générales de la longueur stable. La première découle du lemme 3.6:

PROPOSITION 3.7.1. *Pour tout groupe* Γ *on a l'inégalité:*

$$\| \gamma_1\gamma_2 \| \leqslant \| \gamma_1 \| + \| \gamma_2 \| + \frac{1}{2} \quad (\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma') .$$

Preuve. Elle est immédiate à partir du lemme 3.6.

Cette inégalité est optimale; pour le voir il suffit de prendre $\Gamma = L(u, v, w, t)$, $\gamma_1 = [u, v]$, $\gamma_2 = [w, t]$ et d'appliquer le théorème 1 de la partie 1. Plus généralement, on a le résultat suivant:

PROPOSITION 3.7.2. *Soit* Γ_1 *et* Γ_2 *deux groupes et* $\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2$ *leur somme libre. Alors pour tout* $\gamma_1 \neq 1$ *dans* Γ_1 *et tout* $\gamma_2 \neq 1$ *dans* Γ_2 *on a l'égalité*

$$\| \gamma_1\gamma_2 \|_\Gamma = \| \gamma_1 \|_{\Gamma_1} + \| \gamma_2 \|_{\Gamma_2} + \frac{1}{2} .$$

Commentaire. Les éléments $(\gamma_1\gamma_2)^n$ et $\gamma_1^n\gamma_2^n$ diffèrent par $n/2$ commutateurs environ (lemme 3.6); la proposition signifie que ces commutateurs sont nécessaires à cause de l'indépendance des deux facteurs Γ_1 et Γ_2.

Preuve. D'après l'inégalité évidente $\| \gamma_i \|_\Gamma \leqslant \| \gamma_i \|_{\Gamma_i}$ (qui est d'ailleurs une égalité) et la proposition 3.7.1, on a la relation

$$\| \gamma_1\gamma_2 \|_\Gamma \leqslant \| \gamma_1 \|_{\Gamma_1} + \| \gamma_2 \|_{\Gamma_2} + \frac{1}{2} .$$

Il reste à établir l'inégalité inverse. Pour cela, on s'appuiera sur l'interprétation de l'espace K_Γ comme dual de Q_Γ (voir 3.6, remarque 1) et sur le théorème de dualité. Rappelons que Q_Γ est le quotient de $B_1(\Gamma, \mathbf{R})$ par l'adhérence du sous-espace engendré par $\{\gamma^n - n\gamma ; \gamma \in \Gamma', n \in \mathbf{Z}\}$. On observe que Q_{Γ_1} et Q_{Γ_2} s'injectent dans Q_Γ et sont en somme directe dans cet espace. On aura besoin d'un résultat préliminaire:

Affirmation. L'image de $\partial(\gamma_1, \gamma_2)$ n'appartient pas à la somme directe $Q_{\Gamma_1} \oplus Q_{\Gamma_2}$ dans Q_Γ.

Pour prouver ce fait, il suffit de construire une forme linéaire sur Q_Γ, i.e. un quasi-morphisme homogène sur Γ, qui s'annule sur $Q_{\Gamma_1} \oplus Q_{\Gamma_2}$ et de valeur non nulle sur $\partial(\gamma_1, \gamma_2)$. Tout élément x de Γ s'écrit de manière unique

$$x = x_1 y_1 x_2 y_2 \ldots x_n y_n$$

où x_i et y_i sont des éléments distincts de 1, sauf peut-être x_1 ou y_n, appar-

tenant respectivement à Γ_1 et Γ_2. On pose alors, en s'inspirant de la définition des quasi-morphismes de Brooks (voir 1.1):

$$f(x) = \mathcal{O}(x) - \mathcal{O}(x^{-1}) ,$$

où $\mathcal{O}(x)$ est le nombre d'occurences de $\gamma_1\gamma_2$ dans l'écriture canonique de x. Par la même vérification formelle qu'en 1.1, f est un quasi-morphisme. Le quasi-morphisme homogène associé $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} (f(x^n)/n)$ fait l'affaire car il s'annule sur Γ_1 et Γ_2 et $\varphi(\partial(\gamma_1, \gamma_2)) = d\varphi(\gamma_1, \gamma_2) = -1$.

Revenons à la démonstration de la proposition. Soit ε un réel > 0. D'après le théorème de dualité, il existe un quasi-morphisme homogène φ_i sur Γ_i de norme 1 tel que

$$\varphi_i(\gamma_i) \geqslant 2 \| \gamma_i \|_{\Gamma_i} - \varepsilon \qquad (i = 1, 2) .$$

Notons D la droite de Q_Γ engendrée par l'image de $\partial(\gamma_1, \gamma_2)$. On définit une forme linéaire *de norme* 1 sur $Q_{\Gamma_1} \oplus Q_{\Gamma_2} \oplus D$ en posant

$$\varphi(q_i) = \varphi_i(q_i) \text{ si } q_i \in Q_{\Gamma_i} (i = 1, 2) \qquad \text{et} \qquad \varphi(\partial(\gamma_1, \gamma_2)) = -1 .$$

Grâce au théorème de Hahn-Banach, φ se prolonge en un élément $\tilde{\varphi}$ de K_Γ de norme 1. Par suite

$$\| \gamma_1\gamma_2 \|_\Gamma \geqslant \frac{1}{2} | \tilde{\varphi}(\gamma_1\gamma_2) | = \frac{1}{2} | \varphi_1(\gamma_1) + \varphi_2(\gamma_2) + 1 | \geqslant \| \gamma_1 \|_{\Gamma_1} + \| \gamma_2 \|_{\Gamma_2} + \frac{1}{2} - \varepsilon .$$

On termine en faisant tendre ε vers 0.

Exemple. Dans le groupe libre $L(u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k)$ on a:

$$\| \prod_{i=1}^{k} [u_i, v_i]^{p_i} \| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} | p_i | + \frac{k-1}{2} \qquad (p_i \in \mathbf{Z}) .$$

Ce résultat pourrait aussi s'établir en utilisant la méthode des symboles de la partie 2.

Voici une autre propriété de la longueur stable:

PROPOSITION 3.7.3 (d'annulation). *Supposons qu'il existe* $\varepsilon > 0$ *avec pour tout* $(x, y) \in \Gamma^2$

$$\| [x, y] \| \leqslant \frac{1}{2} - \varepsilon .$$

Alors la longueur stable de Γ *est nulle.*

Preuve. Soit $\varphi \in K$ et $(x_n), (y_n)$ deux suites d'éléments de Γ telles que

$$\| \varphi \| = \lim_{n \to \infty} | \varphi([x_n, y_n]) | .$$

Si φ est non nul, l'inégalité $| \varphi(\gamma) | \leqslant 2 \| \gamma \| \| \varphi \|_\Gamma$ impose

$$\lim_{n \to \infty} \| [x_n, y_n] \| = \frac{1}{2} ,$$

ce qui est exclu par hypothèse. Ainsi $\| \varphi \|_\Gamma = 0$, et par dualité la longueur stable de Γ est nulle.

3.8. Exemples de calcul de longueur stable

Comme les morphismes de groupes $\phi: \Gamma_1 \to \Gamma_2$ diminuent la longueur des commutateurs et la longueur stable:

$$c_{\Gamma_2}(\phi(\gamma)) \leqslant c_{\Gamma_1}(\gamma) \quad \text{et} \quad \| \phi(\gamma) \|_{\Gamma_2} \leqslant \| \gamma \|_{\Gamma_1} \quad (\gamma \in \Gamma_1) ,$$

il est important de disposer de groupes où la longueur des commutateurs est connue. C'est le cas du groupe $\tilde{H}$ des homéomorphismes h de $\mathbf{R}$ vérifiant $h(x+1) = h(x) + 1 (x \in \mathbf{R})$, pour lequel les produits de commutateurs ont été bien étudiés dans [Wo] et [E-H-N]. Par exemple ([Wo], [E-H-N]) la translation d'amplitude t est produit de p commutateurs si et seulement si:

$$| t | < 2p - 1 .$$

Plus généralement, un produit h de p commutateurs de $\tilde{H}$ est caractérisé dans [E-H-N] par la propriété suivante:

$$\inf_{x \in \mathbf{R}} (h(x) - x) < 2p - 1 \quad \text{et} \quad \sup_{x \in \mathbf{R}} (h(x) - x) > 1 - 2p .$$

Le groupe $\tilde{H}$ possède un quasi-morphisme célèbre, le *nombre de translation* τ, défini indépendamment du réel x par:

$$\tau(h) = \lim_{n \to \infty} \frac{h^n(x) - x}{n} \quad (h \in \tilde{H}) .$$

Le nombre de translation est homogène, et il détermine la longueur stable du groupe $\tilde{H}$:

Proposition 3.8. *Pour tout élément h de $\tilde{H}$:* $\| h \|_{\tilde{H}} = \frac{1}{2} | \tau(h) |$.

Preuve. Le nombre de translation est l'unique quasi-morphisme homogène de $\tilde{H}$ (à morphisme et homothétie près), puisque $H_b^2(\tilde{H}, \mathbf{R})$ est égal à $\mathbf{R}(d\tau)$ ([M-M]). On applique alors le théorème de dualité.

Une autre preuve plus directe consisterait à utiliser le critère de [E-H-N] cité plus haut.

Revenons au cas du groupe libre $L = L(u, v)$ et calculons la longueur stable de $[u, [u, v]]$. Pour cela considérons la combinaison de quasi-morphismes de Brooks de $L(u, v]$ définie par

$$f = f_{uvu^{-1}} + f_{u^{-1}v^{-1}u^{-1}} + f_{u^{-1}vu} + f_{uv^{-1}u} .$$

On vérifie comme en 1.1 que $\| df \| = 2$. L'élément $[u, [u, v]]^n$ est conjugué à $(uvu^{-1}v^{-1}u^{-1}vuv^{-1})^n$ et $f((uvu^{-1}v^{-1}u^{-1}vuv^{-1})^n) = 4n - 1$; d'où (lemme 1.1) $c([u, [u, v]]^n) \geqslant E(n/2) + 1$. Finalement, on conclut que

$$\| [u, [u, v]] \|_L = 1/2 .$$

Voici un exemple de calcul de longueur stable par dualité. Soit $f = f_{uv}$ le quasi-morphisme de Brooks associé à uv dans $L = L(u, v)$. Alors $\| df \| \leqslant 1$, donc $\| d\varphi \| = \| \varphi \|_L \leqslant 2$. Mais $\varphi([vu^2, u^{-1}v]) = 2$, et comme

$$| \varphi([vu^2, u^{-1}v]) | \leqslant 2 \| \varphi \|_L \| [vu^2, u^{-1}v] \|_L ,$$

on voit que $\| [vu^2, u^{-1}v] \|_L = \dfrac{1}{2}$.

De plus la norme de la classe c de $d\varphi$ dans $H_b^2(L, \mathbf{R})$ est égale à 1. Pour cet exemple, on a donc $\| d\varphi \| = 2 \| c \|_b$.

On a constaté que la longueur stable peut prendre des valeurs arbitraires (dans $\tilde{H}$ par exemple). Il est également facile de construire un groupe dénombrable Γ avec un élément γ de longueur stable rationnelle donnée:

$$\Gamma = < u, v, w, t \mid [u, v]^p = [w, t] > , \quad \| [u, v] \|_\Gamma = \frac{1}{2p} \quad (p \in \mathbf{N}^*) .$$

(pour la minoration prendre un morphisme de Γ dans $\tilde{H}$). Cependant, pour les groupes libres, elle est minorée par 1/6 (2.6); les résultats précédents suggèrent la question suivante, laissée au lecteur comme conclusion:

Question: la longueur stable d'un groupe libre est-elle à valeurs demi-entières?

BIBLIOGRAPHIE

[B-G] BARGE, J. and E. GHYS. Surfaces et cohomologie bornée. *Invent. Math. 92* (1988), 509-526.

[Be] BESSON, G. *Sém. de Cohomologie bornée.* ENS Lyon (Fév. 1988).

[Brk] BROOKS, R. Some remarks on bounded cohomology. In *Riemannian Surfaces and related topics.* Ann. of Math. Stud. 91 (1981), 53-65.

[Brw] BROWN, K.S. *Cohomology of Groups,* G.M.T. 87, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1982).

[Cu] CULLER, M. Using surfaces to solve equations in free groups. *Topology 20* (1981), 133-145.

[D-V] DENNIS, R.K. and L.N. VASERSTEIN. On a question of M. Newman on the number of commutators. *J. of Algebra 118* (1988), 150-161.

[Ed] EDMUNDS, C.C. On the endomorphism problem for free groups. *Comm. in Algebra 3* (1975), 1-20.

[E-H-N] EISENBUD, D., U. HIRSCH and W. NEUMANN. Transverse foliations of Seifert bundles and self homeomorphism of the circle. *Comment. Math. Helv. 56* (1981), 639-660.

[G-T] GOLDSTEIN, R.Z. and E.C. TURNER. Applications of topological graph theory to group theory. *Math. Z. 165* (1979), 1-10.

[Gr 1] GROMOV, M. Hyperbolic manifolds, groups and actions. *Ann. Math. Studies 97,* Princeton (1981), 183-213.

[Gr 2] —— Volume and bounded cohomology. *Pub. Math. IHES 56* (1982), 5-99.

[H-S] HEIMES, R. and R. STÖCKER. Covering of surfaces. *Arch. Math. 30* (1978), 181-187.

[Iv] IVANOV, N.V. Foundations of the theory of bounded cohomology. *J. of Soviet Math. 37* (1987), 1090-1115.

[Jo] JOHNSON, B.E. Cohomology in Banach Algebras. *Memoirs A.M.S. 127* (1972), 1-96.

[L-N] LYNDON, R.C. and M. NEWMAN. Commutators as products of squares. *Proc. Am. Math. Soc. 39* (1973), 267-272.

[L-S] LYNDON, R.C. and P.E. SCHUPP. *Combinatorial Group Theory.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1977).

[Ma 1] MASSEY, W.S. *Algebraic Topology: An Introduction.* Hartcourt, Brace and word, New York (1967).

[Ma 2] —— Finite covering spaces of 2-manifolds with boundary. *Duke Math. J. 41* (1967), 875-887.

[M-M] MATSUMOTO, S. and S. MORITA. Bounded cohomology of certain groups of homeomorphisms. *Proc. Am. Math. Soc. 94* (1985), 539-544.

[Mil 1] MILNOR, J. On the existence of a connection with curvature zero. *Comment. Math. Helv. 32* (1958), 215-223.

[Mil 2] —— *Introduction to algebraic K-theory.* Princeton University Press, Princeton, New-Jersey (1971).

[Min] MINAKAWA, H. Examples of exceptional homomorphisms which have non-trivial Euler numbers. *Preprint.*

[Mit] MITSUMATSU, Y. Bounded cohomology and L^1-homology of surfaces. *Tolopogy 23* (1984), 465-471.

[Ne] NEWMAN, M. Unimodular commutators. *Proc. AMS 101* (1987), N° 4, 605-609.

[P-S] PÓLYA, G. and G. SZEGÖ. *Problems and theorems in Analysis. Vol. I.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1972).

[Wi] WICKS, M. J. Commutators in free products. *J. London Math. Soc. 37* (1962), 433-444.

[Wo] WOOD, J. Bundles with totally disconnected structure group. *Comment. Math. Helv. 46* (1971), 257-273.

(Reçu le 16 novembre 1989)

Christophe Bavard

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées
ENS Lyon
46, Allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07 (France)