

## 2. Action of $\sigma_{n+1}$ on $\rho_k(\Sigma_k)$

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

2. ACTION OF  $\sigma_{n+1}$  ON  $\rho_k(\Sigma_k)$ 

In this section, we show how the  $n$  usual generators  $(0, 1), \dots, (n-1, n)$  of the group  $\sigma_{n+1}$  act on the subset  $\rho_k(\Sigma_k)$  of  $(\mathbf{Z}/k\mathbf{Z})^{n-1}$ .

LEMMA 2.1. *Let  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \rho_k(\Sigma_k)$ . Then*

$$\begin{aligned} (0, 1) \cdot (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_{n-1}) &= ((1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{n-1}), \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_{n-1}) \\ (i, i+1) \cdot (\alpha_1, \dots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{n-1}) &= (\alpha_1, \dots, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \dots, \alpha_{n-1}), \quad 1 \leq i \leq n-2 \\ (n-1, n) \cdot (\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}) &= (-\alpha_1 \alpha_{n-1}^{-1}, \dots, -\alpha_i \alpha_{n-1}^{-1}, \dots, -\alpha_{n-2} \alpha_{n-1}^{-1}, \alpha_{n-1}^{-1}) \end{aligned}$$

*In particular, if  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \rho_k(\Sigma_k)$ , then  $\alpha_{n-1}$  is invertible (mod  $k$ ).*

*Proof.* Let us show the first equality. Let  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \rho_k(\Sigma_k)$ . Consider the numerated simplex  $S_v$  with vertices

$$(2.2) \quad v_0 = 0, v_i = e_i, 1 \leq i \leq n-1, v_n = ke_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i$$

( $a_i$  representant of the class  $\alpha_i$ ).

Let us identify  $\mathbf{R}^n$  with the points of the hyperplane  $H$  of  $\mathbf{R}^{n+1}$  defined by  $x_{n+1} = 1$ . By identifying the elements of  $\mathbf{R}^n$  with vector columns we see that

$$0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_i \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

where  $0$  is the origin in  $\mathbf{R}^n$  and  $\{e_1, \dots, e_n\}$  is the usual basis of  $\mathbf{R}^n$  and the  $1$  in the second matrix is where you think it should be, namely at the  $i$ -th row. There exists a natural injection of the group  $\text{Aff}(\mathbf{Z}^n)$  in the subgroup of  $GL_{n+1}(\mathbf{Z})$  which preserves  $H$ . It is easy to check that the following matrix  $M \in GL_{n+1}(\mathbf{Z})$  exchanges  $v_0$  and  $v_1$ , preserves  $v_i$  for  $2 \leq i < n$  and sends  $v_n$  to the element  $ke_n + (1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i)e_1 + \sum_{i=2}^{n-1} a_i e_i$ :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

The calculations for the transposition  $(i, i+1)$  are immediate if  $1 \leq i \leq n-2$ .

Finally, let us consider the last equality: We take again the simplex  $S_v$  with vertices as in (2.2). Since  $S_v$  is small-faced, there exists a simplex  $S'_\mu$ ,  $(n-1)$  integers  $b_1, \dots, b_{n-1}$  and an element  $g \in \text{Aff}(\mathbf{Z}^n)$  such that the vertices of  $S'_\mu$  are

$$v'_0 = 0, v'_i = e_i, 1 \leq i \leq n-1, v'_n = ke_n + \sum_{i=1}^{n-1} b_i e_i$$

and such that  $g(v_i) = v'_i$  for  $0 \leq i \leq n-2$ ,  $g(v_{n-1}) = v'_n$  and  $g(v_n) = v'_{n-1}$ . Since  $v_0 = v'_0 = 0$  we have  $g(0) = 0$  and  $g$  is in fact in  $GL_n(\mathbf{Z})$ . The matrix of  $g$  with respect to the standard basis is

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

this gives

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & k \end{pmatrix} \frac{1}{k} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & k & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

But since  $g \in GL_n(\mathbf{Z})$  this implies that

$$-a_i - b_i a_{n-1} \equiv 0 \pmod{k} \quad 1 \leq i \leq n-2.$$

Let us now suppose that  $a_{n-1}$  is not invertible  $(\text{mod } k)$ . Then there exists some prime  $p$  dividing both  $k$  and  $a_{n-1}$ . But then the prime  $p$  divides  $a_i$  too for every  $i$ . So  $p$  divides all coefficients of the vector  $v_n - v_0$  which is an edge of  $S_v$ . But then  $S_v$  is not small-faced which contradicts the fact that  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \rho_k(\Sigma_k)$ . So we have proved that  $a_{n-1}$  is invertible  $(\text{mod } k)$ . And the  $b_i$ 's satisfy

$$b_i \equiv -a_i a_{n-1}^{-1} \pmod{k} \quad 1 \leq i \leq n-2 \quad \text{and} \quad b_{n-1} \equiv a_{n-1}^{-1} \pmod{k}.$$

This proves the last equality.  $\square$