

# PROLONGEMENTS DES DIFFÉOMORPHISMES DE LA SPHÈRE

Autor(en): **Ghys, Etienne**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-58729>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## PROLONGEMENTS DES DIFFÉOMORPHISMES DE LA SPHÈRE

par Etienne GHYS

### 1. INTRODUCTION

Soit  $B^{n+1}$  la boule unité fermée dans  $\mathbf{R}^{n+1}$  ( $n \geq 1$ ) et  $S^n$  la sphère unité. Soit  $\text{Diff}_0^k(S^n)$  et  $\text{Diff}_0^k(B^{n+1})$  les groupes des difféomorphismes de classe  $C^k$  de  $S^n$  et  $B^{n+1}$  respectivement qui sont  $C^k$ -isotopes à l'identité ( $0 \leq k \leq \infty$ ). Par restriction au bord, on a un morphisme de groupes:

$$\rho: \text{Diff}_0^k(B^{n+1}) \rightarrow \text{Diff}_0^k(S^n).$$

Il est bien connu que  $\rho$  est surjectif. En effet, soit  $f$  un élément de  $\text{Diff}_0^k(S^n)$  et  $f_t (t \in [0, 1])$  une  $C^k$ -isotopie entre  $f_0 = \text{id}$  et  $f_1 = f$ . On peut bien sûr supposer que  $f_t = \text{id}$  pour  $t$  assez petit de sorte que l'application définie par:

$$\begin{aligned} F: B^{n+1} &\rightarrow B^{n+1} \\ F(x) &= \|x\| \cdot f_{\|x\|} \left( \frac{x}{\|x\|} \right) \quad \text{pour } x \neq 0, \\ F(0) &= 0, \end{aligned}$$

est un difféomorphisme de classe  $C^k$ , isotope à l'identité, dont la restriction au bord de  $B^{n+1}$  coïncide avec  $f$ .

Dans le cas des homéomorphismes, c'est-à-dire lorsque  $k = 0$ , le morphisme  $\rho$  admet une section évidente. Le prolongement radial d'un homéomorphisme  $f$  de la sphère  $S^n$  est l'homéomorphisme  $\sigma(f)$  de  $B^{n+1}$  défini par:

$$\begin{aligned} \sigma(f)(x) &= \|x\| \cdot f \left( \frac{x}{\|x\|} \right) \quad \text{pour } x \neq 0, \\ \sigma(f)(0) &= 0. \end{aligned}$$

Ce prolongement  $\sigma$  définit un morphisme de groupes qui est une section de  $\rho$ . Bien sûr  $\sigma(f)$  n'est généralement pas différentiable en 0 même si  $f$  est de classe  $C^\infty$ . Le but de cette note est de montrer que cette difficulté ne peut pas être évitée lorsque  $k \geq 1$ .

THÉOREME. *Il n'existe aucun morphisme de groupes  $\sigma$  de  $\text{Diff}_0^\infty(S^n)$  vers  $\text{Diff}_0^1(B^{n+1})$  tel que, pour tout  $f$  de  $\text{Diff}_0^\infty(S^n)$ , le difféomorphisme  $\sigma(f)$  soit un prolongement de  $f$  à la boule.*

Insistons sur le fait que dans l'énoncé du théorème on ne suppose pas que le morphisme  $\sigma$  est continu; il s'agit *a priori* d'un morphisme de groupes abstraits.

Voici un exemple d'une situation contraire. Considérons le cercle comme bord de la bande de Moebius  $M$ . Il se trouve que, dans ce cas, il existe un morphisme  $\sigma$  de  $\text{Diff}_0^\infty(S^1)$  vers le groupe  $\text{Diff}_0^\infty(M)$  des difféomorphismes de classe  $C^\infty$  de  $M$  isotopes à l'identité tel que, pour tout  $f$  de  $\text{Diff}_0^\infty(S^1)$ , le difféomorphisme  $\sigma(f)$  prolonge  $f$  à la bande  $M$ . Pour cela, on considère le disque unité ouvert  $\overset{\circ}{B}^2$  de  $\mathbf{R}^2$  comme plongé dans le plan projectif réel  $P^2$ . Le complémentaire de  $\overset{\circ}{B}^2$  dans  $P^2$  est une bande de Moebius  $M$  dont le bord est le cercle unité  $S^1$ . Deux points de  $S^1$ , éventuellement confondus, définissent deux tangentes dans  $P^2$  qui se coupent en un point de  $M$ . Réciproquement, par un point de  $M$  passent deux tangentes à  $S^1$  (confondues si le point considéré est sur  $S^1$ ). Ainsi  $M$  s'identifie à l'espace des paires de points (éventuellement confondus) sur un cercle et le bord de  $M$  correspond aux paires de points confondus. Il est maintenant clair qu'un difféomorphisme  $f$  du cercle  $S^1$  définit naturellement un difféomorphisme  $\sigma(f)$  de  $M$  qui prolonge  $f$  à la bande  $M$ .

La démonstration du théorème lorsque  $n = 1$  est élémentaire et va servir de modèle pour le cas général. Nous avons cru utile de détailler d'abord ce cas particulier au paragraphe 2. Une lecture sommaire de cette note pourrait d'ailleurs se limiter à ce paragraphe. On étudie alors le cas où  $n$  est un entier impair quelconque au paragraphe 3 puis le cas où  $n$  est pair au paragraphe 4. Le paragraphe 5 est consacré à des remarques générales inspirées par le théorème.

## 2. LE CAS $n = 1$

Nous commencerons par un lemme élémentaire. La démonstration que nous en proposons est rapide mais elle utilise des outils puissants d'analyse. Il est possible par ailleurs d'en donner une démonstration topologique (voir [4]).

LEMME 2.1. Soit  $f$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  du disque  $B^2$  qui est d'ordre fini et respecte l'orientation. Alors  $f$  est  $C^1$ -conjugué à une rotation euclidienne du disque  $B^2$ .

*Démonstration.* Par moyennisation, on construit une métrique riemannienne sur  $B^2$  invariante par  $f$ . Le disque  $B^2$  muni de cette métrique est conformément équivalent au disque unité de  $\mathbf{C}$ . Ceci résulte d'une part de l'existence de coordonnées isothermes sur les surfaces et d'autre part du théorème d'uniformisation de Riemann. Le lemme est alors une conséquence de la classification des difféomorphismes holomorphes du disque unité.  $\square$

Le groupe  $G = PSL(2, \mathbf{R})$  opère par difféomorphismes projectifs sur la droite projective réelle  $P^1$ , difféomorphe au cercle  $S^1$ . Soit  $G_\infty$  le revêtement universel de  $G$  qui est aussi le groupe des relevés des éléments de  $G$  au revêtement universel de  $P^1$ , difféomorphe à la droite  $\mathbf{R}$ . On a une extension centrale:

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow G_\infty \rightarrow G \rightarrow 1 .$$

Le sous-groupe  $\mathbf{Z}$  de  $G_\infty$  correspond aux relevés de l'identité, c'est-à-dire aux translations d'amplitudes entières de la droite.

Soit  $p$  un entier supérieur ou égal à 2 et  $G_p$  le revêtement à  $p$  feuillets de  $G$ , constitué des relevés des éléments de  $G$  au revêtement à  $p$  feuillets de  $P^1 \simeq S^1$ , lui aussi difféomorphe à  $S^1$ . On a ainsi un plongement:

$$i: G_p \rightarrow \text{Diff}_0^\infty(S^1) .$$

Le groupe  $G_p$  est une extension centrale:

$$0 \rightarrow \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \rightarrow G_p \rightarrow G \rightarrow 1 .$$

C'est aussi le quotient de  $G_\infty$  par le sous-groupe central  $p\mathbf{Z}$ .

Le lemme suivant est apparenté à la non trivialité de l'extension de  $G$  par  $\mathbf{Z}$  définissant  $G_\infty$ , soulignée pour la première fois par J. Milnor [5]. La preuve que nous en proposons est inspirée de [1].

LEMME 2.2. Le sous-groupe  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  de  $G_p$  est contenu dans le groupe des commutateurs de  $G_p$ .

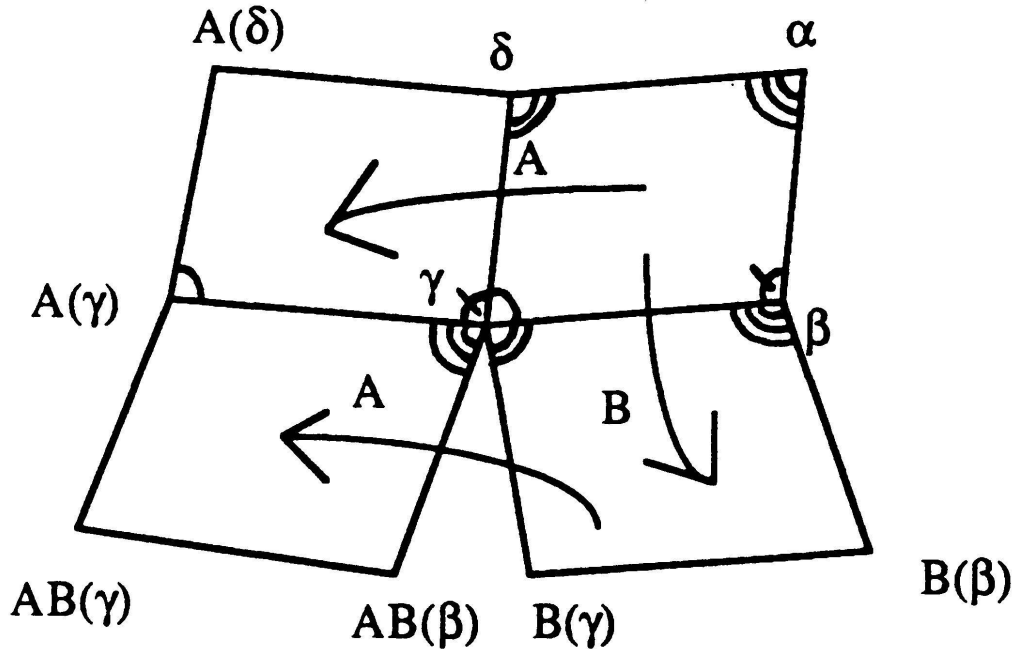
*Démonstration.* Soit  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  quatre points du disque de Poincaré  $D^2$  dont les distances mutuelles vérifient

$$d(\alpha, \beta) = d(\gamma, \delta) \quad \text{et} \quad d(\alpha, \delta) = d(\beta, \gamma) .$$

Soit  $A$  l'isométrie directe du disque de Poincaré qui envoie  $\alpha$  et  $\beta$  sur  $\delta$  et  $\gamma$  et  $B$  celle qui envoie  $\alpha$  et  $\delta$  sur  $\beta$  et  $\gamma$ . Le commutateur  $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$



fixe le point  $\gamma$ ; c'est donc une rotation de centre  $\gamma$ . Ce commutateur envoie le segment joignant  $\gamma$  à  $B(\gamma) = BA(\beta)$  sur le segment joignant  $\gamma$  à  $AB(\beta)$ . La figure suivante montre que l'angle entre ces deux segments est la somme des angles intérieurs du quadrilatère  $\alpha\beta\gamma\delta$ .



D'après une propriété bien connue de géométrie hyperbolique, cette somme est égale au complément à  $2\pi$  de l'aire du quadrilatère  $\alpha\beta\gamma\delta$ . Si l'on choisit convenablement l'orientation de ce quadrilatère, l'angle de la rotation  $[A, B]$  est égal à l'aire de  $\alpha\beta\gamma\delta$  et il peut donc prendre toutes les valeurs strictement inférieures à  $2\pi$  lorsque  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  varient dans  $D^2$ . Rappelons que  $G$  s'interprète comme groupe des isométries directes du disque de Poincaré  $D^2$ ; l'action sur  $P^1$  que nous étudions apparaissant comme action sur le bord de  $D^2$ . Une rotation de  $D^2$  correspond, sur  $P^1 \simeq S^1$ , à une transformation projective conjuguée à une rotation euclidienne du cercle  $S^1$  de même angle. On constate donc qu'il est possible de construire deux courbes de classe  $C^\infty$

$$t \in [0, 2\pi[ \mapsto A_t \in G,$$

$$t \in [0, 2\pi[ \mapsto B_t \in G,$$

avec  $A_0 = B_0 = \text{id}$  et telles que  $[A_t, B_t]$  soit la rotation d'angle  $t$ .

Ces courbes se relèvent dans  $G_\infty$  en des courbes  $\tilde{A}_t$  et  $\tilde{B}_t$  avec  $\tilde{A}_0 = \text{id} = \tilde{B}_0$  et il est clair que l'élément  $[\tilde{A}_\pi, \tilde{B}_\pi]^2$  est l'élément 1 du sous-groupe  $\mathbf{Z}$  de  $G_\infty$ . En passant au quotient par  $p\mathbf{Z}$ , nous avons ainsi exprimé le générateur 1 de  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  dans  $G_p$  comme un produit de deux commutateurs.  $\square$

Supposons maintenant par l'absurde qu'il existe un morphisme

$$\sigma: \text{Diff}_0^\infty(S^1) \rightarrow \text{Diff}_0^1(B^2)$$

qui prolonge les difféomorphismes du cercle au disque. Notons  $u$  l'élément 1 de  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  engendrant le centre de  $G_p$ . Le difféomorphisme  $\sigma(i(u))$  de  $B^2$  est d'ordre  $p$ . Il est conjugué à une rotation d'ordre  $p$  d'après 2.1 et fixe donc un unique point  $x_0$  de  $B^2$ .

Puisque  $u$  est central dans  $G_p$ , tous les éléments de  $\sigma(G_p)$  fixent  $x_0$ . Par passage à la différentielle en  $x_0$ , on construit donc un morphisme

$$D: G_p \rightarrow GL(T_{x_0}B^2) \simeq GL(2, \mathbf{R}) .$$

A conjugaison près, on peut supposer que  $D(u)$  est une rotation d'ordre  $p$ .

LEMME 2.3. *Si  $p \geq 3$ , le centralisateur d'une rotation d'ordre  $p$  dans  $GL(2, \mathbf{R})$  est abélien.*

*Démonstration.* Ce centralisateur coïncide en effet avec le groupe de similitudes de  $\mathbf{R}^2$ .  $\square$

La démonstration du théorème lorsque  $n = 1$  est maintenant facile. Le morphisme  $D$ , étant à valeurs dans le centralisateur de  $D(u)$ , a une image abélienne. Il en résulte que  $D$  est trivial sur le groupe des commutateurs de  $G_p$  et donc sur  $u$  d'après 2.2. Mais ceci est absurde puisque  $D(u)$  est conjugué à une rotation d'ordre  $p$ .

On remarquera que nous n'avons utilisé l'hypothèse sur  $\sigma$  que pour pouvoir affirmer que l'ordre de  $\sigma(i(u))$  est exactement  $p$ . Nous avons donc montré en fait un résultat plus fort: le groupe  $G_p$  et, *a fortiori*,  $\text{Diff}_0^\infty(S^1)$ , ne se plongent pas dans  $\text{Diff}_0^1(B^2)$ . Si l'on tient compte du résultat (difficile) selon lequel  $\text{Diff}_0^\infty(S^1)$  est un groupe simple [7], et donc qu'un morphisme de source  $\text{Diff}_0^\infty(S^1)$  est injectif ou trivial, on déduit:

THÉORÈME. *Il n'existe aucun morphisme non trivial de  $\text{Diff}_0^\infty(S^1)$  vers  $\text{Diff}_0^1(B^2)$ .*

### 3. LE CAS DES SPHÈRES IMPAIRES

Si  $n$  s'écrit sous la forme  $2k - 1$ , nous identifierons la sphère  $S^n$  avec l'ensemble des points  $(z_1, \dots, z_k)$  de  $\mathbf{C}^k$  tels que  $|z_1|^2 + \dots + |z_k|^2 = 1$ . Soit  $p$

un nombre premier. Nous noterons  $C_p$  le sous-groupe de  $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k-1})$  formé des difféomorphismes du type

$$f: (z_1, \dots, z_k) \in S^{2k-1} \mapsto (w_1 z_1, \dots, w_k z_k) \in S^{2k-1},$$

où  $w_1, \dots, w_k$  sont des racines  $p$ -èmes de l'unité. Bien sûr,  $C_p$  est un groupe isomorphe à  $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^k$ .

Supposons par l'absurde qu'il existe un morphisme

$$\sigma: \text{Diff}_0^\infty(S^{2k-1}) \rightarrow \text{Diff}_0^1(B^{2k})$$

qui prolonge les difféomorphismes de la sphère à la boule.

LEMME 3.1. *Il existe un unique point  $x_0$  intérieur à  $B^{2k}$  qui est fixe par  $\sigma(C_p)$ .*

*Démonstration.* Rappelons d'abord qu'un difféomorphisme périodique de période  $p$  est localement linéarisable au voisinage d'un point fixe (voir par exemple [2]). Il en résulte que l'ensemble des points fixes d'un tel difféomorphisme est une sous-variété. Lorsque la variété ambiante est la sphère  $S^n$ , la sous-variété des points fixes, si elle n'est pas vide, a la même homologie modulo  $p$  qu'une sphère de dimension  $d$  avec  $0 \leq d \leq n$ . C'est un exemple classique d'application de la théorie de Smith: voir par exemple [2].

Soit  $f$  un élément de  $C_p$  tel qu'aucun des  $w_i$  qui lui correspondent ne soit égal à 1. Ainsi,  $f$  n'a pas de point fixe sur  $S^{2k-1}$ . Le difféomorphisme  $\sigma(f)$  de  $B^{2k}$  a bien sûr au moins un point fixe intérieur à  $B^{2k}$ . En collant deux copies du difféomorphisme  $\sigma(f)$  de  $B^{2k}$  le long du bord  $S^{2k-1}$ , on obtient un difféomorphisme  $F$  de  $S^{2k}$ , double de  $\sigma(f)$ . Ce difféomorphisme  $F$  est d'ordre  $p$ , sans point fixe sur  $S^{2k-1}$  et possède au moins un point fixe dans chacun des deux hémisphères bordés par  $S^{2k-1}$ . L'ensemble de ses points fixes n'est donc pas connexe. Il résulte du rappel que nous venons de faire que l'ensemble des points fixes de  $F$  a l'homologie modulo  $p$  d'une sphère de dimension 0 et que c'est en fait une sphère de dimension 0, c'est-à-dire un ensemble à deux éléments! Autrement dit,  $\sigma(f)$  a un unique point fixe  $x_0$  dans  $B^{2k}$ .

Le lemme est alors une conséquence de la commutativité de  $C_p$  et du fait que les  $f$  pour lesquels aucun  $w_i$  n'est égal à 1 engendrent  $C_p$ .  $\square$

Considérons la différentielle de  $\sigma(C_p)$  en  $x_0$ . On obtient ainsi un morphisme

$$D: C_p \rightarrow GL(T_{x_0} B^{2k}) \simeq GL(2k, \mathbf{R}).$$

LEMME 3.2. *A conjugaison près, on peut supposer que l'image par  $D$  de  $C_p$  coïncide avec le sous-groupe  $\overline{C_p}$  formé des applications linéaires de  $\mathbf{R}^{2k} \simeq \mathbf{C}^k$  du type*

$$(z_1, \dots, z_k) \in \mathbf{C}^k \mapsto (\mu_1 z_1, \dots, \mu_k z_k) \in \mathbf{C}^k,$$

avec  $\mu_i$  racine  $p$ -ème de l'unité.

*Démonstration.* Le fait que  $D(C_p)$  soit, à conjugaison près, contenu dans  $\overline{C_p}$  résulte de la classification des sous-groupes finis commutatifs de  $GL(2k, \mathbf{R})$  dont tous les éléments sont d'ordre  $p$ . Nous avons déjà rappelé qu'un difféomorphisme d'ordre fini est localement conjugué à sa différentielle au voisinage d'un point fixe. Il en résulte qu'un difféomorphisme d'ordre fini d'une variété connexe ne peut avoir une différentielle égale à l'identité en un point fixe à moins que ce difféomorphisme ne soit l'identité. En d'autres termes,  $D$  est injective et on a donc  $D(C_p) = \overline{C_p}$  (à conjugaison près).  $\square$

Remarquons que nous n'affirmons pas que si  $f \in C_p$  est défini par  $(w_1, \dots, w_k)$ , alors le  $k$ -uplet  $(\mu_1, \dots, \mu_k)$  qui définit  $D(f)$  coïncide avec  $(w_1, \dots, w_k)$ .

On choisit  $p > k$  et  $f$  un élément de  $C_p$  tels que  $D(f)$  soit une application linéaire du type:

$$(z_1, \dots, z_k) \mapsto (\mu_1 z_1, \dots, \mu_k z_k),$$

où les  $\mu_i$  sont distincts deux à deux et différents de 1. Ceci implique que  $x_0$  est un point fixe isolé de  $\sigma(f)$  et les considérations du lemme 3.1 entraînent que  $x_0$  est le seul point fixe de  $\sigma(f)$ .

LEMME 3.3. *Le centralisateur  $Z$  de  $D(f)$  dans  $GL(2k, \mathbf{R})$  est abélien.*

*Démonstration.* Tout élément de  $Z$  est diagonal, car il préserve les directions propres de  $D(f)$ .  $\square$

Soit  $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k-1}, f)$  le groupe des difféomorphismes de  $S^{2k-1}$  de classe  $C^\infty$  commutant avec  $f$  et isotopes à l'identité par une isotopie commutant avec  $f$ . Le groupe  $\sigma \text{Diff}_0^\infty(S^{2k-1}, f) \subset \text{Diff}_0^1(B^{n+1})$  fixe évidemment  $x_0$  et la différentielle en  $x_0$  est dans  $Z$ . On a donc un morphisme

$$D: \text{Diff}_0^\infty(S^{2k-1}, f) \rightarrow Z$$

qui envoie  $f$  sur un élément non trivial.

La contradiction cherchée est dans le lemme suivant, analogue au lemme 2.2. Il ne serait pas difficile de déduire ce lemme d'un théorème profond

de W. Thurston sur la simplicité de certains groupes de difféomorphismes. Il nous semble cependant intéressant de démontrer le lemme de manière complètement explicite.

LEMME 3.4. *L'élément  $f$  appartient au groupe des commutateurs de  $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k-1}, f)$ .*

*Démonstration.* Soit  $w_1, \dots, w_k$  les racines de l'unité telles que

$$f(z_1, \dots, z_k) = (w_1 z_1, \dots, w_k z_k)$$

Puisque  $\sigma(f)$  ne fixe que le point  $x_0$  dans  $B^{n+1}$ , le difféomorphisme  $f$  n'a pas de point fixe dans  $S^n$  c'est-à-dire que les  $w_i$  sont tous différents de 1. Fixons des entiers non nuls  $n_1, \dots, n_k$  tels que:

$$w_j = \exp(2i\pi n_j/p) \quad j = 1, \dots, k.$$

Soit  $\phi_t$  le flot périodique ( $\phi_1 = \text{id}$ ) défini sur  $S^{2k-1}$  par:

$$\phi_t(z_1, \dots, z_k) = (\exp(2i\pi n_1 t)z_1, \dots, \exp(2i\pi n_k t)z_k).$$

On a  $f = \phi_{1/p}$ .

Soit  $N$  le plus petit multiple commun de  $p, n_1, \dots, n_k$ . Ainsi  $1/p$  et toutes les périodes des orbites périodiques de  $\phi_t$  sont des multiples entiers de  $1/N$ .

Comme pour tout flot périodique sans point fixe, on peut recouvrir  $S^{2k-1}$  par un nombre fini d'ouverts  $U_j$  «trivialisants» pour le fibré de Seifert associé. Plus précisément,  $U_j$  est difféomorphe au quotient de  $\mathring{B}^{2k-2} \times S^1$  par un difféomorphisme périodique du type

$$(u_1, \dots, u_{k-1}, \theta) \in \mathring{B}^{2k-2} \times S^1 \mapsto (\alpha_1 u_1, \dots, \alpha_{k-1} u_{k-1}, w\theta) \in \mathring{B}^{2k-2} \times S^1$$

où  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, w$  sont des racines  $N$ -èmes de l'unité. Dans ces coordonnées, le flot  $\phi_t$  se relève à  $\mathring{B}^{2k-2} \times S^1$  par

$$\bar{\phi}_t(u_1, \dots, u_{k-1}, \theta) = (u_1, \dots, u_{k-1}, \exp(2i\pi t)\theta).$$

Rappelons que nous avons construit au paragraphe précédent des courbes  $A_t$  et  $B_t$  dans  $G = \text{PSL}(2, \mathbf{R})$  (avec  $t \in [0, 2\pi[$ ) et leurs relevés  $\tilde{A}_t$  et  $\tilde{B}_t$  dans  $G_\infty$ . Notons  $\bar{A}_t$  et  $\bar{B}_t$  les projections de  $\tilde{A}_t$  et  $\tilde{B}_t$  dans  $G_N$ . Les éléments  $\bar{A}_t$  et  $\bar{B}_t$  peuvent être considérés comme des difféomorphismes du cercle  $S^1$  commutant avec la rotation d'angle  $2\pi/N$ . De plus,  $[\bar{A}_t, \bar{B}_t]$  est une rotation d'angle  $t/N$ .

Soit  $\tau_j: S^{2k-1} \rightarrow [0, 2\pi[$  une fonction de classe  $C^\infty$  à support compact dans  $U_j$  et invariante par  $\phi_t$ . On note aussi  $\tau_j: \mathring{B}^{2k-2} \times S^1 \rightarrow [0, 2\pi[$  la fonction

obtenue en composant la projection de  $\check{B}^{2k-2} \times S^1$  sur  $U_j$  et  $\tau_j$ . On remarquera que  $\tau_j(x, \theta)$  ne dépend pas de  $\theta$  car  $\tau_j$  est invariant par  $\phi_t$ . Les applications

$$(x, \theta) \in \check{B}^{2k-2} \times S^1 \mapsto (x, \bar{A}_{\tau_j(x)}(\theta)) \in \check{B}^{2k-2} \times S^1$$

$$(x, \theta) \in \check{B}^{2k-2} \times S^1 \mapsto (x, \bar{B}_{\tau_j(x)}(\theta)) \in \check{B}^{2k-2} \times S^1$$

passent au quotient en des difféomorphismes de  $U_j$  à supports compacts. En prolongeant ces difféomorphismes par l'identité en dehors de  $U_j$ , on obtient des difféomorphismes  $\bar{A}_{\tau_j}$  et  $\bar{B}_{\tau_j}$  de  $S^{2k-1}$  qui commutent évidemment avec  $f$ . Par ailleurs,

$$[\bar{A}_{\tau_j}, \bar{B}_{\tau_j}](m) = \phi_{\tau_j(m)/N}(m).$$

Le difféomorphisme  $f$  coïncide avec  $\phi_{1/p}$ . Pour terminer la démonstration du lemme, il suffit donc d'écrire la fonction constante  $N/p$  comme somme de fonctions  $\tau_j$  du type précédent:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{N} \tau_1 + \dots + \frac{1}{N} \tau_q.$$

En effet, on aura alors

$$f = \phi_{1/p} = [\bar{A}_{\tau_1}, \bar{B}_{\tau_1}] \dots [\bar{A}_{\tau_q}, \bar{B}_{\tau_q}].$$

Pour cela, il suffit d'utiliser une partition de l'unité subordonnée aux  $U_j$  et d'en prendre la moyenne sous l'action de  $S^1$  associée à  $\phi_t$  pour la rendre invariante.  $\square$

#### 4. LE CAS DES SPHÈRES PAIRES

Nous identifierons la sphère  $S^{2k}$  à l'ensemble des points  $(z_1, \dots, z_k, t)$  de  $\mathbf{C}^k \times \mathbf{R}$  tels que  $|z_1|^2 + \dots + |z_k|^2 + t^2 = 1$ . Comme précédemment, nous fixons un nombre premier  $p$  et nous considérons le groupe  $C_p$  des difféomorphismes de  $S^{2k}$ , isotopes à l'identité, du type:

$$f: (z_1, \dots, z_k, t) \in S^{2k} \mapsto (w_1 z_1, \dots, w_k z_k, t) \in S^{2k},$$

où les  $w_i$  sont des racines  $p$ -èmes de l'unité.

Supposons encore par l'absurde qu'il existe un morphisme

$$\sigma: \text{Diff}_0^\infty(S^{2k}) \rightarrow \text{Diff}_0^1(B^{2k+1})$$

qui prolonge les difféomorphismes de la sphère à la boule.

LEMME 4.1. *Il existe un unique arc  $I$  dans  $B^{2k+1}$  connectant les points  $N = (0, \dots, 0, 1)$  et  $S = (0, \dots, 0, -1)$  et formé de points fixés par tous les éléments de  $\sigma C_p$ . Cet arc ne dépend pas de  $p$ .*

*Démonstration.* Comme précédemment, si aucun des  $w_i$  n'est égal à 1, le difféomorphisme  $f$  a exactement deux points fixes sur la sphère  $S^{2k}$  (les points  $N$  et  $S$ ). La théorie de Smith permet alors de montrer que l'ensemble des points fixes de  $\sigma(f)$  est un arc connectant  $N$  et  $S$ . Un homéomorphisme d'ordre fini d'un intervalle qui fixe les extrémités est nécessairement l'identité. Il résulte de ce fait, de la commutativité de  $C_p$  et du fait que les  $f$  pour lesquels aucun  $w_i$  n'est égal à 1 engendrent  $C_p$  qu'il existe un arc  $I$  formé de points fixes par tous les éléments de  $\sigma C_p$ .

Puisque  $C_p$  et  $C_q$  commutent (si  $p$  et  $q$  sont deux nombres premiers quelconques), l'arc  $I$  ne dépend pas du choix de  $p$ .  $\square$

Soit  $x_0$  un point de  $I$ . Considérons la différentielle de  $\sigma(C_p)$  en  $x_0$ . On obtient ainsi un morphisme

$$D: C_p \rightarrow GL(T_{x_0} B^{2k+1}) \simeq GL(2k+1, \mathbf{R}).$$

LEMME 4.2. *A conjugaison près, on peut supposer que l'image de  $D$  coïncide avec le groupe  $\overline{C_p}$  des applications linéaires de  $\mathbf{R}^{2k+1} \simeq \mathbf{C}^k \times \mathbf{R}$  du type:*

$$(z_1, \dots, z_k, t) \in \mathbf{C}^k \times \mathbf{R} \mapsto (\mu_1 z_1, \dots, \mu_k z_k, t) \in \mathbf{C}^k \times \mathbf{R}$$

où les  $\mu_j$  sont des racines  $p$ -èmes de l'unité.

*Démonstration.* Identique à celle de 3.2.  $\square$

On choisit  $p > n$  et  $f$  un élément de  $C_p$  tels que  $D(f)$  soit une application linéaire du type précédent pour laquelle les  $\mu_j$  sont distincts deux à deux et différents de 1. D'après ce que nous avons vu, l'ensemble des points fixes de  $\sigma(f)$  coïncide alors avec  $I$ .

La démonstration se sépare ici de celle décrite au paragraphe précédent. En effet, l'élément  $f$  n'est certainement pas un produit de commutateurs dans le groupe  $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, f)$  des difféomorphismes de classe  $C^\infty$ , isotopes à l'identité et commutant avec  $f$ . Ceci résulte du fait que la différentielle d'un élément de  $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, f)$  au point  $N$  est diagonale de sorte qu'un produit de commutateurs a une différentielle égale à l'identité en  $N$ , contrairement à  $f$ . C'est précisément ce fait qui a servi de base à la démonstration du théorème



lorsque  $n$  est impair et qui nous empêche donc de généraliser la preuve au cas où  $n$  est pair.

Soit  $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$  le groupe des difféomorphismes de  $S^{2k}$ , coïncidant avec l'identité au voisinage de  $N$  et  $S$  et isotopes à l'identité par une isotopie à support compact dans  $S^{2k} - \{N, S\}$ . Notre premier but sera de montrer que  $\sigma\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$  fixe  $I$  point par point. Nous en déduirons l'existence d'un point  $x_0$  de  $I$  fixe par tout le groupe  $\sigma\text{Diff}_0^\infty(S^{2k})$  et il sera facile d'en déduire une contradiction.

On se fixe deux nombres premiers distincts  $p$  et  $q$  et deux éléments  $f_1$  et  $f_2$  de  $C_p$  et  $C_q$  respectivement, du type précédent. Soit  $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)$  le sous-groupe de  $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$  formé des éléments commutant avec  $f_i$  et isotopes à l'identité par une isotopie commutant avec  $f_i$  ( $i = 1, 2$ ).

LEMME 4.3. *Les groupes  $\sigma\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)$  ( $i = 1, 2$ ) fixent  $I$  point par point. De plus, les différentielles de ces difféomorphismes aux points de  $I$  sont égales à l'identité.*

*Démonstration.* Ce groupe préserve globalement l'ensemble des points fixes de  $\sigma(f_i)$ , c'est-à-dire  $I$ . L'action de  $f_i$  sur  $S^{2k} - \{N, S\}$  est libre. Un difféomorphisme de  $V_i = S^{2k} - \{N, S\}/(f_i)$  qui est l'identité au voisinage des deux bouts, et qui est isotope à l'identité par une isotopie à support compact, se relève de manière unique en un élément de  $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)$ . En d'autres termes,  $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)$  est isomorphe au groupe  $\text{Diff}_{c,0}^\infty(V_i)$  des difféomorphismes de  $V_i$  de classe  $C^\infty$ , à supports compacts, isotopes à l'identité par une isotopie à support compact. On a donc un morphisme

$$\text{Diff}_{c,0}^\infty(V_i) \rightarrow \text{Diff}_0^\infty(I).$$

Il s'agit de montrer que ce morphisme est trivial.

Un théorème de W. Thurston [7] affirme que  $\text{Diff}_{c,0}^\infty(V_i)$  est un groupe simple. Il nous suffit donc de trouver un élément non trivial de  $\sigma\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)$  qui fixe  $I$  point par point pour en conclure qu'il en est de même pour tous les éléments.

Soit  $\phi$  un élément de  $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)$  qui ne commute pas avec  $f_j$  ( $j \in \{1, 2\}$  et  $j \neq i$ ). Puisque  $\sigma(\phi)$  préserve globalement  $I$  et que  $\sigma(f_j)$  fixe  $I$  point par point, le commutateur  $\sigma(\phi f_j \phi^{-1} f_j^{-1})$  fixe  $I$  point par point. Il suffit alors de remarquer que  $\phi f_j \phi^{-1} f_j^{-1}$  coïncide avec l'identité au voisinage de  $N, S$ , commute avec  $f_i$ , est isotope à l'identité par une isotopie commutant avec  $f_i$  et à support dans  $S^{2k} - \{N, S\}$ . Nous avons ainsi trouvé un élément non trivial dans le noyau du morphisme considéré et ce morphisme est donc bien trivial.



En fixant un point  $x_0$  de  $I$  et en considérant la différentielle en  $x_0$  d'un élément de  $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)$ , on obtient un morphisme d'un groupe simple à valeurs dans le groupe abélien  $Z$ , centralisateur de  $D(f_i)$  dans  $GL(2k+1, \mathbf{R})$ . Ces différentielles sont donc toutes égales à l'identité.  $\square$

LEMME 4.4. *Le groupe  $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$  est engendré par les deux sous-groupes  $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)$  ( $i = 1, 2$ ). Ainsi, les éléments de  $\sigma\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$  fixent  $I$  point par point et leurs différentielles sont égales à l'identité en ces points.*

*Démonstration.* Je remercie C. Bavard à qui je dois cette démonstration.

Soit  $\phi$  un difféomorphisme d'ordre  $pq$  d'une variété  $M$ . On suppose que l'action associée de  $\mathbf{Z}/pq\mathbf{Z}$  sur  $M$  est libre. Soit  $U \subset M$  un ouvert tel que les  $\phi^i(U)$  soient disjoints deux à deux (où l'exposant  $i$  est à lire dans  $\mathbf{Z}/pq\mathbf{Z}$ ). Si  $g_0, g_1, \dots, g_{pq-1}$  sont  $pq$  difféomorphismes de  $M$  à supports dans  $U$ , on notera  $\{g_0, g_1, \dots, g_{pq-1}\}$  le difféomorphisme suivant de  $M$ :

$$g_0 \circ (\phi^{-1} \circ g_1 \circ \phi^1) \circ (\phi^{-2} \circ g_2 \circ \phi^2) \circ \dots \circ (\phi^{-(pq-1)} \circ g_{pq-1} \circ \phi^{(pq-1)}) .$$

On remarquera que tous les facteurs de cette composition commutent. Fixons deux difféomorphismes  $g$  et  $h$  de  $M$  à supports dans  $U$  et définissons  $6pq$  difféomorphismes  $a_j^i$  et  $b_j^i$  ( $1 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq pq-1$ ) par:

$$\begin{array}{llll} a_j^1 = g & a_j^2 = \text{id} & a_j^3 = h^{-1} & \text{si } j \equiv 0 \pmod{p} \\ a_j^1 = h^{-1} & a_j^2 = g & a_j^3 = \text{id} & \text{si } j \not\equiv 0 \pmod{p} \\ b_j^1 = h & b_j^2 = g^{-1} & b_j^3 = \text{id} & \text{si } j \equiv 0 \pmod{q} \\ b_j^1 = g^{-1} & b_j^2 = \text{id} & b_j^3 = h & \text{si } j \not\equiv 0 \pmod{q} . \end{array}$$

On pose alors, pour  $i = 1, 2, 3$ ,

$$A_i = \{a_0^i, \dots, a_{pq-1}^i\} \quad \text{et} \quad B_i = \{b_0^i, \dots, b_{pq-1}^i\} .$$

On remarque que les trois difféomorphismes  $A_i$  commutent avec  $\phi^p$  alors que les  $B_i$  commutent avec  $\phi^q$ .

Une vérification simple (que le lecteur pourra faire d'abord lorsque  $p = 2$  et  $q = 3$ ) montre que

$$A_1 B_1 A_2 B_2 A_3 B_3 = ghg^{-1}h^{-1} .$$

Ainsi, nous avons montré que le commutateur de deux difféomorphismes à supports dans  $U$  est un produit de difféomorphismes de  $M$  commutant avec  $\phi^p$  ou  $\phi^q$ .

Appliquons cette technique à la situation du lemme. Dans ce cas, l'action de  $\mathbf{Z}/pq\mathbf{Z}$  considérée est engendrée par  $f_1$  et  $f_2$  d'ordres respectifs  $p$  et  $q$ , agissant sur  $S^{2k} - \{N, S\}$ . Nous obtenons que si  $g$  et  $h$  sont deux difféomorphismes de  $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$  à supports dans un ouvert  $U$  assez petit de  $S^{2k} - \{N, S\}$ , le commutateur  $[g, h]$  appartient au groupe engendré par les sous-groupes  $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S, f_i)$  ( $i = 1, 2$ ). Pour conclure, il suffit de remarquer que ces commutateurs engendrent  $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ . Ceci résulte de deux faits. Tout d'abord, si les ouverts  $U_j$  recouvrent  $S^{2k} - \{N, S\}$ , les groupes  $\text{Diff}_{0,c}^\infty(U_j) \subset \text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$  engendrent  $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$ ; c'est le lemme de fragmentation de [6]. D'autre part, d'après le théorème de W. Thurston déjà mentionné, les groupes  $\text{Diff}_{0,c}^\infty(U_i)$  sont des groupes simples et donc sont engendrés par les commutateurs.  $\square$

Soit  $s$  l'involution isotope à l'identité définie par

$$s(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \dots, x_k + iy_k, t) = (x_1 - iy_1, -x_2 - iy_2, \dots, -x_k - iy_k, -t).$$

Elle commute avec  $C_2$  de sorte que  $\sigma(s)$  préserve  $I$  globalement. De plus,  $s$  échange  $S$  et  $N$  et il existe donc un unique point  $x_0$  de  $I$  qui est fixe par  $\sigma(s)$ . Soit  $W$  et  $E$  les points  $(-1, 0, \dots, 0)$  et  $(1, 0, \dots, 0)$  de  $S^{2k}$ . Il est clair que l'arc analogue à  $I$  joignant  $W$  à  $E$ , formé des points fixes de  $\sigma(s)$ , contient  $x_0$ . Les deux groupes  $\sigma\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$  et  $\sigma\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, E, W)$  fixent donc  $x_0$  et leurs différentielles en  $x_0$  sont triviales.

LEMME 4.5. *Les groupes  $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$  et  $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, E, W)$  engendrent  $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k})$ .*

*Démonstration.* Soit  $f$  un élément de  $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k})$ . Soit  $g_1$  un élément de  $\text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, E, W)$  qui coïncide avec  $f$  au voisinage des points  $N$  et  $S$  et posons  $g_2 = g_1^{-1} \circ f$ . On a alors  $g_2 \in \text{Diff}_0^\infty(S^{2k}, N, S)$  et  $f = g_1 \circ g_2$ .  $\square$

La contradiction cherchée est maintenant claire. Le groupe  $\sigma\text{Diff}_0^\infty(S^{2k})$  tout entier fixe  $x_0$  et sa différentielle en  $x_0$  est triviale. Ceci est absurde puisque les éléments d'ordre fini distincts de l'identité (par exemple ceux de  $\sigma(C_p)$ ) ne peuvent avoir une différentielle égale à l'identité en un point fixe. Ceci termine la preuve du théorème dans le cas où  $n$  est pair.

## 5. QUELQUES REMARQUES

Le résultat obtenu dans cette note suggère immédiatement une question plus générale. Si  $V$  est une variété à bord non vide  $\partial V$ , dans quelles

conditions existe-t-il un morphisme de  $\text{Diff}_0^\infty(\partial V)$  vers  $\text{Diff}_0^\infty(V)$  qui «prolonge les difféomorphismes à l'intérieur»? Nous avons vu qu'un tel morphisme existe si  $V$  est une bande de Moebius et n'existe pas si  $V$  est une boule. Le lecteur n'aura maintenant aucune difficulté à traiter le cas général où  $V$  est une surface compacte à bord. Qu'en est-il par contre si  $V$  est un corps à anses de genre  $g$  (i.e. le domaine de  $\mathbf{R}^3$  bordé par une surface de genre  $g$  plongée de manière habituelle)?

De manière analogue, on peut s'intéresser aux morphismes entre groupes de difféomorphismes de variétés fermées (i.e. compactes sans bord). Voici deux exemples.

On peut identifier l'espace projectif complexe  $\mathbf{CP}^n$  au quotient de  $(S^2)^n$  par l'action du groupe symétrique. Cette identification peut être obtenue de la façon suivante. Au point de coordonnées homogènes  $[a_0 : a_1 : \dots : a_n]$  de  $\mathbf{CP}^n$ , on associe les  $n$  zéros du polynôme  $a_0 z^n + \dots + a_n$  dans  $\mathbf{C} \cup \{\infty\} \simeq S^2$  qui sont définis à l'ordre près. Il est facile de vérifier qu'un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  de  $S^2$  mène ainsi à un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  de  $\mathbf{CP}^n$  et on a donc un morphisme naturel:

$$\text{Diff}_0^\infty(S^2) \rightarrow \text{Diff}_0^\infty(\mathbf{CP}^n) .$$

Une deuxième construction générale s'obtient de la façon suivante. Si  $V$  est une variété fermée et si  $PTV$  désigne le projectifié du fibré tangent à  $V$ , on a un morphisme obtenu par différentielle:

$$\text{Diff}_0^\infty(V) \rightarrow \text{Diff}_0^\infty(PTV) .$$

On notera que  $PTV$  est fermée. Ces exemples suggèrent la question qui suit:

QUESTION. *Soit  $V_1$  et  $V_2$  deux variétés fermées telles qu'il existe un morphisme non trivial de  $\text{Diff}_0^\infty(V_1)$  vers  $\text{Diff}_0^\infty(V_2)$ . Peut-on affirmer que la dimension de  $V_1$  est inférieure ou égale à celle de  $V_2$ ?*

Les cas d'isomorphismes entre groupes de difféomorphismes ont été étudiés dans [3]:  $\text{Diff}_0^\infty(V_1)$  et  $\text{Diff}_0^\infty(V_2)$  ne sont isomorphes que si  $V_1$  et  $V_2$  sont difféomorphes.

Signalons enfin que les méthodes utilisées dans cet article tombent en défaut dans le contexte analytique réel (sauf lorsque  $n = 1$ ).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOTT, R. On some formulas for the characteristic classes of group actions. *Lecture notes in math.* 652 (1978), 25-61, Springer-Verlag.
- [2] BREDON, G. E. *Introduction to compact transformation groups*. Academic Press, 1972.
- [3] FILIPKIEWICZ, R. P. Isomorphisms between diffeomorphism groups. *Ergod. Th. & Dyn. Sys.* 2 (1982), 159-171.
- [4] VON KERÉKJÁRTÓ, B. Über die periodischen Transformationen der Kreisschiebe und Kugelfläche. *Math. Annalen* 80 (1921), 36-38.
- [5] MILNOR, J. On the existence of a connection with curvature zero. *Comment. Math. Helv.* 32 (1958), 215-223.
- [6] PALIS, J. and S. SMALE. Structural stability theorems. *Proc. Symp. Pure Math. AMS.* vol. 14, 223-232.
- [7] THURSTON, W. Foliations and groups of diffeomorphisms. *Bull. Amer. Math. Soc.* 80 (1974), 304-307.

(Reçu le 28 septembre 1990)

Etienne Ghys

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées  
E.N.S. Lyon  
46, Allée d'Italie  
69364 Lyon, cedex 07 (France)

**Vide-leer-empty**