4. CONTINUOUS SPECTRA

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Then, for $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_\theta(n) &= q^{\frac{n}{2}} i((q+1)\sin\theta\cos(n\theta) - (q-1)\cos\theta\sin(n\theta)) \\ &= q^{\frac{n}{2}} i(\sin((n+1)\theta) - q\sin((n-1)\theta)) \, , \end{aligned} \tag{5}$$

and

$$\tilde{f}_\theta(0) = (q+1)\, i \sin\theta \, .$$

PROPOSITION 3.6. *The functions* $\tilde{f}_\theta, 0 < \theta < \pi,$ *are not in* $L^2(F)$.

Proof. It is sufficient to show that

$$(q+1)\sin\theta\cos(n\theta) - (q-1)\cos\theta\sin(n\theta) \not\to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty \, .$$

This is the dot product of the two vectors

$$v_1 = ((q+1)\sin\theta, -(q-1)\cos\theta) \quad \text{and} \quad v_2 = (\cos(n\theta), \sin(n\theta)) \, .$$

Since v_2 is not a constant function of n, we see that cosine of the angle between v_1 and v_2 is bounded away from 0 for arbitrarily large n.

Combining Propositions 3.5 and 3.6 we conclude

COROLLARY 3.7. *The discrete spectrum of* T *consists of the numbers* $\pm(q+1)$, *whose corresponding eigenfunctions (given in Example 3.1) span two one-dimensional eigenspaces of* $L^2(F)$.

Unlike the typical f_λ with $|\lambda| > 2\sqrt{q}$, those with $|\lambda| < 2\sqrt{q}$ satisfy

$$f_\lambda = O(q^{\frac{n}{2}}) \, .$$

Our goal now is to show that these are approximate eigenfunctions that can be used to completely decompose $L^2(F)$.

4. CONTINUOUS SPECTRA

We wish to embed $L^2([0, \pi])$ with an appropriate measure into $L^2(F)$. To this end, let $\psi \in L^2([0, \pi])$ and $\tilde{f}_\theta(n)$ be extended as odd functions of $\theta \in [-\pi, \pi]$, and define

$$F_\psi(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta) \tilde{f}_\theta(n) d\theta \, .$$

THEOREM 4.1. *F_ψ is in $L^2(F)$ and we have the Plancherel formula*

$$< F_{\psi_1}, F_{\psi_2} > \; = \; < \psi_1, \psi_2 > \;, \tag{6}$$

where the inner product on the right is

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi_1(\theta)\bar{\psi}_2(\theta)((q-1)^2 + 4q\sin^2\theta)d\theta \;.$$

Proof. We first note that

$$\frac{1}{2\pi}\int_\pi^\pi \psi(\theta)(i\sin((n+1)\theta)) - qi\sin((n-1)\theta))d\theta = q\hat{\psi}(n-1) - \hat{\psi}(n+1) \;,$$

where $\hat{\psi}(n)$ is the n-th Fourier coefficient of ψ. Therefore

$$< F_{\psi_1}, \bar{F}_{\psi_2} > \; = \frac{1}{q+1}(q+1)^2\hat{\psi}_1(1)\hat{\psi}_2(1)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(q^2\hat{\psi}_1(n-1)\hat{\psi}_2(n-1) - q\hat{\psi}_1(n+1)\hat{\psi}_2(n-1)$$

$$- q\hat{\psi}_1(n-1)\hat{\psi}_2(n+1) + \hat{\psi}_1(n+1)\hat{\psi}_2(n+1))$$

$$= (q+1)\hat{\psi}_1(1)\hat{\psi}_2(1) + q^2\sum_{n=0}^{\infty}\hat{\psi}_1(n)\hat{\psi}_2(n)$$

$$- q(\sum_{n=2}^{\infty}\hat{\psi}_1(n)\hat{\psi}_2(n-2) + \sum_{n=0}^{\infty}\hat{\psi}_1(n)\hat{\psi}_2(n+2)) \; + \; \sum_{n=2}^{\infty}\hat{\psi}_1(n)\hat{\psi}_2(n) \;.$$

Now

$$\hat{\psi}(n-2) + \hat{\psi}(n+2) = 2\hat{\psi}(n) - 4(\psi\sin^2)^\wedge(n) \;.$$

Therefore we have

$$(q+1)\hat{\psi}_1(1)\hat{\psi}_2(1) + q^2\sum_{n=1}^{\infty}\hat{\psi}_1(n)\hat{\psi}_2(n)$$

$$- q(2\sum_{n=1}^{\infty}\hat{\psi}_1(n)\hat{\psi}_2(n) - 4\sum_{n=1}^{\infty}\hat{\psi}_1(n)(\psi_2\sin^2)^\wedge(n))$$

$$- q(-\hat{\psi}_1(1)\hat{\psi}_2(-1) + \hat{\psi}_1(0)\hat{\psi}_2(2)) + \sum_{n=1}^{\infty}\hat{\psi}_1(n)\hat{\psi}_2(n) \; - \; \hat{\psi}_1(1)\hat{\psi}_2(1) \;.$$

Recalling Parseval's formula

$$\sum_{n=1}^{\infty}\hat{\psi}_1(n)\overline{\hat{\psi}_2(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi_1(\theta)\hat{\psi}_2(\theta)d\theta$$

we get

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi_1(\theta)\psi_2(\theta)\left((q-1)^2+4q\sin^2(\theta)\right)d\theta\ ,$$

and since $\bar{F}_{\psi_2} = -F_{\bar{\psi}_2}$ we obtain (6).

5. Spectral decomposition

Let E be the space of functions F_ψ with $\psi \in L^2([0,\pi])$. It follows from §4 that E is a subspace of $L^2(F)$, invariant with respect to T. Further, let R be the two dimensional subspace generated by the discrete spectrum according to Corollary 3.7.

THEOREM 5.1. *We have a direct sum decomposition into invariant subspaces*

$$L^2(F) = R \oplus E\ .$$

Proof. The two spaces are easily seen to be orthogonal. We show that $E^\perp = R$. Let $g \in L^2(F)$ such that $<g, F_\psi> = 0$ for all ψ, i.e.,

$$0 = \frac{1}{q+1}\,g(0)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} i(q+1)\sin\theta\psi(\theta)d\theta$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} g(n)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(\theta)i(\sin((n+1)\theta)-q\sin((n-1)\theta))d\theta\, q^{-\frac{n}{2}}$$

$$= g(0)\hat{\psi}(1) + \sum_{n=1}^{\infty} g(n)(\hat{\psi}(n+1)-q\hat{\psi}(n-1))q^{-\frac{n}{2}}\ .$$

Therefore

$$g(0)\hat{\psi}(1)+\sum_{n=1}^{\infty} g(n)\hat{\psi}(n+1)q^{-\frac{n}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} g(n+1)\hat{\psi}(n)q^{-\frac{n-1}{2}}\ ,$$

or (as $\hat{\psi}(0) = 0$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(n-1)\hat{\psi}(n)q^{-\frac{n-1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} g(n+1)\hat{\psi}(n)q^{-\frac{n-1}{2}}\ .$$

Since $\psi \in L^2([0,\pi])$ and $g \in L^2(F)$, this can be viewed as an equality of inner products in the space l^2 of square integrable sequences. Now as ψ varies over