

3. Eigenfunctions

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$\begin{aligned}
&= f(1)g(0) + \sum_{n=0}^{\infty} q f(n)g(n+1)q^{-(n+1)} + \sum_{n=2}^{\infty} f(n)g(n-1)q^{-(n-1)} \\
&= f(1)g(0) + f(0)g(1) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n)g(n+1)q^{-n} \\
&\quad + q \sum_{n=1}^{\infty} f(n)g(n-1)q^{-n} - f(1)g(0) \\
&= f(0)g(1) + \sum_{n=0}^{\infty} (f(n)qg(n-1) + f(n)g(n+1))q^{-n} = \langle f, T\bar{g} \rangle .
\end{aligned}$$

3. EIGENFUNCTIONS

An automorphic eigenfunction of T on X with eigenvalue λ is a function on F that satisfies

$$\lambda f(0) = (q+1)f(1) ,$$

$$\lambda f(n) = qf(n-1) + f(n+1) , \quad n \geq 1 .$$

If we write $u(n) = \begin{pmatrix} f(n+1) \\ f(n) \end{pmatrix}$ and normalize $u(0) = \begin{pmatrix} \lambda \\ q+1 \end{pmatrix}$, we obtain the recursion

$$u(n) = A^n u(0)$$

with

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Let $x_1, x_2 = \frac{1}{2}(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4q})$ be the characteristic roots of A and assume that $x_1 \neq x_2$, i.e., that $\lambda \neq \pm 2\sqrt{q}$. Solving the recursion we get

PROPOSITION 3.1. *The eigenfunctions on F with eigenvalue λ are the multiples of the function*

$$(4) \quad f_\lambda(n) = \begin{cases} \frac{1}{x_1 - x_2} (\lambda(x_1^n - x_2^n) - q(q+1)(x_1^{n-1} - x_2^{n-1})) , & \text{if } n \geq 1 \\ q+1 & \text{if } n = 0 . \end{cases}$$

Example 3.2. If $\lambda = q + 1$ then $x_1 = q, x_2 = 1$ and

$$f_{q+1}(n) \equiv q + 1 ,$$

generating the space of constant functions. If $\lambda = -(q + 1)$, then

$$f_{-(q+1)}(n) = (-1)^n(q + 1) .$$

Example 3.3. When $\lambda = 2\sqrt{q}$ we can solve directly to get

$$f_{2\sqrt{q}}(n) = (q + 1 - (q - 1)n)q^{\frac{n}{2}},$$

and similarly

$$f_{-2\sqrt{q}}(n) = (-1)^n(q + 1 - (q - 1)n)q^{\frac{n}{2}} .$$

Remark 3.4. Since our tree is bipartite, we expect f_λ to be related to $f_{-\lambda}$ by a factor of $(-1)^n$ (compare [B, §8]). This can be seen from (4).

PROPOSITION 3.5. *The only eigenvalues λ with $|\lambda| > 2\sqrt{q}$ for which f_λ is in $L^2(F)$ are $\lambda = \pm(q + 1)$.*

Proof. Recalling (2) we see that if $f_\lambda \in L^2(F)$ then

$$f_\lambda(n) = o(q^{\frac{n}{2}}) \quad \text{as } n \rightarrow \infty .$$

Now

$$(x_1 - x_2)f_\lambda(n) = x_1^{n-1}(\lambda x_1 - q(q + 1)) - x_2^{n-1}(\lambda x_2 - q(q + 1)) .$$

Assuming with no loss of generality that $|x_1| > \sqrt{q}, |x_2| = \frac{q}{|x_1|} < \sqrt{q}$, then

$x_2^{n-1}(\lambda x_2 - q(q + 1)) = o(q^{\frac{n}{2}})$, so that we must have

$$\lambda x_1 - q(q + 1) = 0 ,$$

i.e., $\lambda = \pm(q + 1)$. Conversely, f_{q+1} and $f_{-(q+1)}$ are clearly in $L^2(F)$.

We turn our attention to λ with $|\lambda| < 2\sqrt{q}$. Then $x_2 = \bar{x}_1, |x_1| = \sqrt{q}$ and we let $x_1 = \sqrt{q}e^{i\theta}$. Then $\lambda = 2\sqrt{q}\cos\theta, 0 < \theta < \pi$. We renormalize and define

$$\tilde{f}_\theta = \frac{x_1 - x_2}{2\sqrt{q}} f_{2\sqrt{q}\cos\theta} .$$

Then, for $n \geq 1$,

$$(5) \quad \begin{aligned} \tilde{f}_\theta(n) &= q^{\frac{n}{2}} i ((q+1) \sin \theta \cos(n\theta) - (q-1) \cos \theta \sin(n\theta)) \\ &= q^{\frac{n}{2}} i (\sin((n+1)\theta) - q \sin((n-1)\theta)) , \end{aligned}$$

and

$$\tilde{f}_\theta(0) = (q+1) i \sin \theta .$$

PROPOSITION 3.6. *The functions $\tilde{f}_\theta, 0 < \theta < \pi$, are not in $L^2(F)$.*

Proof. It is sufficient to show that

$$(q+1) \sin \theta \cos(n\theta) - (q-1) \cos \theta \sin(n\theta) \not\rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty .$$

This is the dot product of the two vectors

$$v_1 = ((q+1) \sin \theta, -(q-1) \cos \theta) \quad \text{and} \quad v_2 = (\cos(n\theta), \sin(n\theta)) .$$

Since v_2 is not a constant function of n , we see that cosine of the angle between v_1 and v_2 is bounded away from 0 for arbitrarily large n .

Combining Propositions 3.5 and 3.6 we conclude

COROLLARY 3.7. *The discrete spectrum of T consists of the numbers $\pm(q+1)$, whose corresponding eigenfunctions (given in Example 3.1) span two one-dimensional eigenspaces of $L^2(F)$.*

Unlike the typical f_λ with $|\lambda| > 2\sqrt{q}$, those with $|\lambda| < 2\sqrt{q}$ satisfy

$$f_\lambda = O(q^{\frac{n}{2}}) .$$

Our goal now is to show that these are approximate eigenfunctions that can be used to completely decompose $L^2(F)$.

4. CONTINUOUS SPECTRA

We wish to embed $L^2([0, \pi])$ with an appropriate measure into $L^2(F)$. To this end, let $\psi \in L^2([0, \pi])$ and $\tilde{f}_\theta(n)$ be extended as odd functions of $\theta \in [-\pi, \pi]$, and define

$$F_\psi(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta) \tilde{f}_\theta(n) d\theta .$$